

ACHILLES PAPAPETROU

SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

ACHILLES PAPAPETROU

SPEZIELLE RELATIVITÄTS THEORIE



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

ACHILLES PAPAPETROU

**SPEZIELLE
RELATIVITÄTSTHEORIE**



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

ACHILLES PAPAPETROU · SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK
HERAUSGEGEBEN VON ROBERT ROMPE UND ERNST SCHMUTZER
BAND 24

SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

von

Prof. Dr. ACHILLES PAPAPETROU
Institut Henri Poincaré, Paris

Fünfte, unveränderte Auflage

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN
BERLIN 1975

Verlagslektor: Dipl.-Phys. G. Zahn
Schutzumschlaggestaltung: H. Hoefmann
© VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975
Printed in the German Democratic Republic
Lizenz-Nr. 206 · 435/135/75
Fotomechanischer Nachdruck: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“, 582 Bad Langensalza
LSV 1114
Bestellnummer 569 495 8
EVP 15,80 Mark

VORWORT

Das vorliegende Buch ist in erster Linie für den Gebrauch der an den Hochschulen Studierenden gedacht. Es wird in ihm versucht, eine nach Möglichkeit einfache und übersichtliche Darstellung des Hauptinhalts der speziellen Relativitätstheorie zu geben mit dem konkreten Ziel, den Leser zur selbständigen Anwendung der Theorie bei seiner künftigen Tätigkeit zu befähigen. Diesem Ziel entsprechend werden im Text neben der Entwicklung der Grundprinzipien auch diejenigen Anwendungen der Theorie behandelt, welche sich zur Charakterisierung der Bedeutung und Tragweite dieser Prinzipien besonders eignen und damit auch zu einem tieferen Verständnis der Theorie beitragen.

Das erste Kapitel enthält die Formulierung des der speziellen Relativitätstheorie zugrunde liegenden Relativitätsprinzips und eine Diskussion seiner allgemeinen Folgerungen. Im zweiten Kapitel wird dann die relativistische Mechanik des Massenpunktes entwickelt. In diesen beiden Kapiteln wird von der 4-dimensionalen Geometrie lediglich der Begriff des (4-dimensionalen) Vektors benutzt. Sie dürften daher nicht nur für den der Theorie besonders zugeneigten, sondern auch für den allgemein interessierten Leser ohne Schwierigkeit verständlich sein, vorausgesetzt, daß er eine gute Kenntnis der NEWTONschen Mechanik besitzt. Die beiden ersten Kapitel enthalten auch die meisten den Experimentalphysiker interessierenden Anwendungen der Theorie.

In den drei folgenden Kapiteln ist die Verwendung der wichtigsten Begriffe der Tensorrechnung unvermeidlich. Diese werden zu Beginn des dritten Kapitels auseinandergesetzt, jedoch nicht in ihrer allgemeinsten, sondern in der einfacheren Form, welche bei einer Beschränkung auf die pseudokartesischen Koordinatensysteme des MINKOWSKISchen Raumes möglich ist. Das dritte Kapitel ist der MAXWELLSchen Theorie des elektromagnetischen Feldes im leeren Raum in ihrer 4-dimensionalen, der speziellen Relativitätstheorie angemessenen Form gewidmet. Das vierte Kapitel behandelt die Mechanik des Kontinuums. Diese steht zwar nicht in unmittelbarem Zusammenhang mit irgendwelchen praktisch interessierenden Anwendungen, ist aber für den Übergang zur allgemeinen Relativitätstheorie unentbehrlich. Darüber hinaus enthält die Mechanik des Kontinuums die für die Formulierung der Erhaltungssätze nötigen Begriffe. Eine allgemeine Diskussion der Erhaltungssätze bildet den Gegenstand des letzten Kapitels.

Eine Bemerkung ist vielleicht an dieser Stelle erforderlich: Der Übergang von der NEWTONschen zur relativistischen Mechanik im zweiten und vierten

Kapitel folgt nicht der historischen Entwicklung, sondern wird rein synthetisch durchgeführt. Dabei dient als Grundlage die Forderung, daß für die jeweils betrachteten physikalischen Größen — für Impuls und Energie in der Mechanik des Massenpunktes, für den Tensor $T_{\mu\nu}$ in der Mechanik des Kontinuums — nicht die GALILEISCHE, sondern die LORENTZSCHE Transformation gilt. Dieses Vorgehen ist wohl dadurch gerechtfertigt, daß das Buch lediglich das praktische Ziel verfolgt, dem Leser die für eine spätere Anwendung der Theorie erforderlichen Kenntnisse zu vermitteln. Dafür genügt es aber, die Theorie in möglichst einfacher Weise unter Verwendung einheitlicher Forderungen bei der Entwicklung ihrer Teile zu formulieren. Der auch an der historischen Entwicklung der Theorie interessierte Leser wird entsprechende Unterlagen in anderen, ausführlicheren oder älteren Werken finden können.

Herr Dr. W. URICH hat das ganze Manuskript gelesen und mehrere sachliche und sprachliche Verbesserungen vorgeschlagen. Für seine Hilfe spreche ich ihm meinen herzlichen Dank aus. Auch die Herren W. KLOSE, H. J. MEISTER und H. STOLZ haben Teile des Manuskriptes gelesen, wofür ich ihnen bestens danken möchte.

Berlin, März 1955

A. PAPAPÉTROU

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Kapitel I. Das Relativitätsprinzip	
§ 1. Die Hypothesen der NEWTONschen Mechanik	9
§ 2. Der Versuch von MICHELSON	13
§ 3. Das Relativitätsprinzip	15
§ 4. Die LORENTZ-Transformation	18
§ 5. Die Längenkontraktion	22
§ 6. Die Zeitdilatation	24
§ 7. Transformation der Geschwindigkeit	26
§ 8. Der MINKOWSKISCHE 4-dimensionale Raum	29
§ 9. Die allgemeine LORENTZ-Transformation	34
§ 10. Vierdimensionale Vektoren. Der Geschwindigkeitsvektor	38
 Kapitel II. Dynamik des Massenpunktes	
§ 11. Der 4-dimensionale Impulsvektor	41
§ 12. Der relativistische Erhaltungssatz	44
§ 13. Die dynamische Grundgleichung	46
§ 14. Der Satz von der Trägheit der Energie	50
§ 15. Die dynamische Grundgleichung in 4-dimensionaler Form	54
§ 16. Ein nichtmechanischer Prozeß. Wärmemenge und Temperatur	57
§ 17. Anwendungen	60
 Kapitel III. Elektrodynamik	
§ 18. Tensoren. Tensoralgebra	69
§ 19. Tensoranalysis	75
§ 20. Die MAXWELLSchen Gleichungen in 4-dimensionaler Form	79
§ 21. Das elektromagnetische Potential	83
§ 22. Transformationsformeln für $F_{\lambda\mu}$, s_λ und A_λ	86
§ 23. Das Feld eines geladenen Teilchens	88
§ 24. DOPPLER-Effekt und Aberration	93
§ 25. Der 4-dimensionale Spannungstensor	97
§ 26. Die Bewegung eines geladenen Teilchens	103
 Kapitel IV. Mechanik des Kontinuums	
§ 27. Problemstellung. Spannungen	106
§ 28. Die NEWTONschen Bewegungsgleichungen	108
§ 29. Der 4-dimensionale Tensor $T_{\lambda\mu}$	112
§ 30. Der Übergang zur speziellen Relativitätstheorie	116
§ 31. Die relativistischen Bewegungsgleichungen des Kontinuums	122
§ 32. Anwendungen	124

Kapitel V. Die Erhaltungssätze

§ 33. Der Energie-Impulssatz	131
§ 34. Der Drehimpulssatz	136
§ 35. Der Schwerpunktsatz	139
§ 36. Transformationseigenschaften. Die Invarianz der Ladung	141
§ 37. Der Energie-Impulsvektor	145
§ 38. Kontinuum und Massenpunkt	148
§ 39. Der 4-dimensionale Momententensor	150
§ 40. Transformationsformeln für $I_{\lambda\mu}$. Eigenschaften der Schwerpunkts- linie	156
§ 41. Das allgemeine Punktteilchen	162
Sachverzeichnis	169

Kapitel I

DAS RELATIVITÄTSPRINZIP

§ 1. Die Hypothesen der NEWTONschen Mechanik

Es ist heute üblich, die Gesamtheit der Folgerungen und Lehrsätze, die sich aus der Diskussion des NEWTONschen Bewegungsgesetzes

$$\left. \begin{aligned} F_x &= m \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ F_y &= m \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ F_z &= m \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned} \right\} (I, 1)$$

ableiten lassen, als die *NEWTONsche Mechanik* zu bezeichnen. Im Gegensatz dazu stellt die *relativistische Mechanik* die im Sinne der speziellen Relativitätstheorie verallgemeinerte Mechanik dar.

Das NEWTONsche Bewegungsgesetz basiert auf einer Anzahl wichtiger Hypothesen. Leider sind diese Hypothesen bei der Darstellung der NEWTONschen Mechanik oft überhaupt nicht erwähnt, da man sie als sozusagen selbstverständlich ansieht. Die spezielle Relativitätstheorie fordert aber, daß man einige dieser Hypothesen wesentlich abändert. Deshalb wollen wir hier damit beginnen, diese Hypothesen zusammenzufassen und kurz zu erläutern.

Die erste Hypothese betrifft die Struktur des Raumes. Der Raum wird als euklidisch angenommen, und die Koordinaten x, y, z des bewegten Teilchens, welche im Bewegungsgesetz (I, 1) seine Lage zur Zeit t beschreiben, beziehen sich auf ein kartesisches Koordinatensystem. Es gibt eine Fülle von kartesischen Koordinatensystemen, die sich gegeneinander beliebig bewegen. So können wir zur Beschreibung einer bestimmten Bewegung z. B. ein mit der Erdoberfläche festverbundenes oder aber auch ein mit einem auf der Erdoberfläche beliebig bewegten Wagen festverbundenes kartesisches Koordinatensystem verwenden. Das Bewegungsgesetz (I, 1) gilt nur in einigen von diesen Koordinatensystemen, die wir *Inertialsysteme* nennen. In den anderen kartesischen Koordinatensystemen gilt eine der Gleichung (I, 1) ähnliche Beziehung, die sich von (I, 1) dadurch unterscheidet, daß zu der wirklichen Kraft $\mathfrak{F}$ noch eine scheinbare Kraft hinzutritt, die man allgemein als Trägheits- oder Inertialkraft bezeichnet.

welche die Hypothese der absoluten Zeit zum Ausdruck bringt. Die Gleichungen (1, 2) und (1, 3) stellen die GALILEI-Transformation dar, welche also den Übergang von einem kartesischen Koordinatensystem zu einem zweiten, relativ zum ersten gleichförmig-translatorisch bewegten ermöglicht, wenn man die Hypothesen der NEWTONschen Mechanik zugrunde legt.

Aus (1, 2) und (1, 3) folgt

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} \quad (1, 4)$$

und

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y'}{dt'^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z'}{dt'^2} = \frac{d^2 z}{dt^2}. \quad (1, 5)$$

Da ferner die Masse eine vom Koordinatensystem unabhängige Konstante ist und andererseits die Kraftkomponenten beim Übergang von (x, y, z) zu (x', y', z') unverändert bleiben, so folgt, falls in (x, y, z) das Bewegungsgesetz (1, 1) gilt, daß dann auch in (x', y', z') dasselbe Bewegungsgesetz gelten muß. Wenn also (x, y, z) ein Inertialsystem ist, so sind alle (x', y', z') , die sich gegen (x, y, z) gleichförmig-translatorisch bewegen, auch Inertialsysteme. Dies ist das *Relativitätstheorem* der NEWTONschen Mechanik. Danach sind alle Inertialsysteme für die Beschreibung von rein mechanischen Erscheinungen einander völlig gleichwertig. Es ist also nicht möglich, durch rein mechanische Versuche ein besonderes Inertialsystem auszuzeichnen.

Trotzdem bedeutet das Relativitätstheorem der NEWTONschen Mechanik nicht die Widerlegung der Hypothese des absoluten Koordinatensystems. Der Grund dafür liegt darin, daß die Argumente, die zur Einführung dieser Hypothese führten, anderen Betrachtungen entstammen, die nichts mit rein mechanischen Vorgängen zu tun haben. Es handelt sich dabei um die Erscheinungen, welche mit der Fortpflanzung von Lichtwellen und, noch allgemeiner, von elektromagnetischen Wellen zusammenhängen.

Betrachten wir zunächst eine Wellenbewegung in einem materiellen Medium, z. B. eine elastische Welle. Wenn wir dasjenige Koordinatensystem zugrunde legen, in welchem das elastische Medium ruht, dann wird die Geschwindigkeit der Wellenfortpflanzung unabhängig von der Richtung, in der sich die Welle fortpflanzt¹⁾. In diesem Koordinatensystem ist also die Wellenfortpflanzung isotrop. Bei einer ebenen Welle ist die Verschiebung der einzelnen Teilchen des elastischen Mediums aus ihren Gleichgewichtslagen durch Gleichungen folgender Form bestimmt:

$$\xi = \xi_0 \sin \left(2\pi \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - Vt}{\lambda} \right). \quad (1, 6)$$

¹⁾ Wenn wir Kristalle mit anisotropen elastischen Eigenschaften ausschließen.

ξ_0 ist die Wellenamplitude, V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, λ die Wellenlänge und (α, β, γ) sind die Richtungskosinusse der Wellennormalen,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Mathematisch läßt sich die Isotropie der Fortpflanzung folgendermaßen beschreiben: wir betrachten die Punkte (x, y, z) des Raumes, für welche der in der Klammer von (I, 6) stehende Ausdruck — die Phase der betreffenden Welle — einen gegebenen Wert hat. Nach dem Zeitintervall dt werden diesen Wert der Phase andere Punkte $(x + dx, y + dy, z + dz)$ annehmen, wobei (dx, dy, dz) die Beziehung

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz - V dt = 0 \quad (I, 7)$$

erfüllen. Die Größe

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = dl$$

ist die Projektion des Vektors (dx, dy, dz) auf die Wellennormale, welche die Komponenten (α, β, γ) hat. Statt (I, 7) kann man also schreiben

$$dl = V dt.$$

Daraus folgt, daß sich die Welle in die Richtung (α, β, γ) mit der Geschwindigkeit

$$\frac{dl}{dt} = V \quad (I, 8)$$

fortpflanzt, d. h. mit einer Geschwindigkeit, welche für alle Richtungen gleich ist.

Wir betrachten nun dieselbe Wellenbewegung im Koordinatensystem (x', y', z') , welches mit (x, y, z) durch die GALILEI-Transformation (I, 2) und (I, 3) verbunden ist. Führen wir (I, 2) und (I, 3) in (I, 6) ein, so ergibt sich

$$\xi = \xi_0 \sin \left(2\pi \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma z' - (V - av)t'}{\lambda} \right). \quad (I, 9)$$

Eine einfache Wiederholung der Rechnung, die zu (I, 8) geführt hat, ergibt jetzt für die sich in der Richtung (α, β, γ) fortplanzende Welle die Geschwindigkeit

$$\frac{dl'}{dt'} = V - av. \quad (I, 10)$$

Im Koordinatensystem (x', y', z') hängt also die Geschwindigkeit von der Richtung der Wellennormalen ab, d. h., die Fortpflanzung ist anisotrop. Danach gibt es für diese elastische Welle ein bestimmtes Koordinatensystem, welches sich dadurch auszeichnet, daß in ihm, und nur in ihm, die Wellenfortpflanzung isotrop ist. Den physikalischen Grund für diese Auszeichnung haben wir schon erwähnt: Es handelt sich um dasjenige Koordinatensystem, in welchem das elastische Medium ruht.

Es ist uns aber auch eine Wellenbewegung bekannt, welche keinen materiellen Träger hat: Die Fortpflanzung von Lichtwellen im Vakuum. Da man sich jedoch eine Wellenbewegung ohne einen entsprechenden Träger nur schwer vorstellen konnte, hat man für die Lichtfortpflanzung im Vakuum, unmittelbar nach der Entdeckung der Interferenzeigenschaften des Lichtes, einen hypothetischen Träger — den *Äther* — eingeführt. Die Annahme der Existenz des Äthers führt nun unmittelbar zur Hypothese des absoluten Koordinatensystems. Da wir nämlich an der Hypothese der absoluten Zeit, und deshalb an der GALILEI-Transformation festhalten, können wir den Übergang von (1, 6) zu (1, 9) auch für eine Lichtwelle vornehmen. Daraus folgt dann, daß auch die Lichtfortpflanzung nur in einem einzigen Koordinatensystem isotrop sein kann. Dieses Koordinatensystem ist dadurch ausgezeichnet, daß in ihm „der Äther ruht“, und wird mit dem absoluten Koordinatensystem identifiziert. Danach sollte man das absolute Koordinatensystem mit optischen Mitteln suchen und bestimmen können.

Später, als man die elektromagnetische Natur der Lichtwellen erkannte, wurde die allgemeine Behauptung ausgesprochen, daß das absolute Koordinatensystem auch für die elektromagnetischen Vorgänge von Bedeutung sei und daher auch mit Hilfe von elektromagnetischen Versuchen bestimmbar sein müßte.

Für die hier folgende Diskussion ist es besonders wichtig und soll daher nochmals betont werden, daß nach dem eben beschriebenen Gedankengang die Hypothese des absoluten Koordinatensystems im wesentlichen eine Folge der Hypothese der absoluten Zeit bildet.

§ 2. Der Versuch von MICHELSON

Eine große Anzahl von verschiedenen Versuchen wurde unternommen, um eine Anisotropie bei der Lichtfortpflanzung bzw. ein Anzeichen für das Vorhandensein des absoluten Koordinatensystems bei elektromagnetischen Erscheinungen nachzuweisen. Alle diese Versuche blieben jedoch ohne Erfolg. Eine entscheidende Rolle spielte dabei der Versuch von MICHELSON, da er eine im Vergleich zu dem nach der Hypothese des absoluten Koordinatensystems erwarteten Effekt so große Meßgenauigkeit gestattete, daß das Fehlen des Effektes mit voller Sicherheit nachgewiesen werden konnte.

Wir wollen hier in Kürze die Anordnung dieses Versuches und die Berechnung des dabei zu erwartenden Effektes angeben. Monochromatisches Licht aus der Quelle Q (Fig. 2) fällt auf die halbdurchlässige Platte P und wird dort in ein reflektiertes und ein durchgelassenes Bündel geteilt. Die beiden Bündel werden an den Spiegeln S_1 und S_2 reflektiert. Nach nochmaliger Reflexion bzw. Durch-

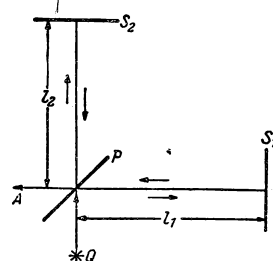


Fig. 2

gang durch die Platte P erzeugen sie Interferenzstreifen, die in der Umgebung der Stelle A zu beobachten sind.

Wenn das Interferometer im absoluten Koordinatensystem ruht, ist der Wegunterschied der zwei in Fig. 2 gezeichneten Strahlen

$$\Delta s = 2(l_1 - l_2). \quad (2, 1)$$

Wenn aber das ganze Interferometer sich z. B. in Richtung von l_1 mit der Geschwindigkeit v bewegt, wird der Wegunterschied einen von (2, 1) verschiedenen Wert haben. Um ihn zu berechnen, bemerken wir zunächst, daß während der Bewegung des ersten Lichtstrahls von P bis S_1 der Apparat sich um eine Länge x verschoben hat, für die die Beziehung

$$\frac{l_1 + x}{c} = \frac{x}{v} \quad (2, 2)$$

gilt (c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum). Während des Rückweges dieses Strahls verschiebt sich der Apparat um eine weitere Strecke x' , gegeben durch

$$\frac{l_1 - x'}{c} = \frac{x'}{v}. \quad (2, 3)$$

Der gesamte Weg dieses Lichtstrahls ist also nicht mehr $2l_1$, sondern $2l_1 + x - x'$. Löst man (2, 2) nach x und (2, 3) nach x' auf, so ergibt sich

$$2l_1 + x - x' = \frac{2l_1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \quad (2, 4)$$

Auch der zweite, längs des Armes l_2 des Interferometers sich bewegende Lichtstrahl wird jetzt einen anderen Weg durchlaufen. Er muß jetzt den Spiegel S_2 nicht mehr senkrecht, sondern um einen kleinen Winkel α nach vorn geneigt treffen, damit er nach der Reflexion wieder denselben Punkt der Platte P erreicht. Für die Verschiebung $y = l_2 \tan \alpha$ erhält man jetzt die Beziehung

$$\frac{\sqrt{l_2^2 + y^2}}{c} = \frac{y}{v}.$$

Daraus folgt

$$\sqrt{l_2^2 + y^2} = \frac{l_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Der Gesamtweg dieses Lichtstrahls ist

$$2\sqrt{l_2^2 + y^2} = \frac{2l_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (2, 5)$$

Der Wegunterschied wird also jetzt nicht mehr den Wert (2, 1) haben, sondern die Differenz von (2, 4) und (2, 5) sein:

$$\Delta s' = \frac{2l_1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{2l_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (2, 6)$$

Dreht man nun das Interferometer bei gleichbleibender Geschwindigkeit v um 90° , so werden die Rollen von l_1 und l_2 vertauscht, und der Wegunterschied wird nach (2, 6) den neuen Wert

$$\Delta s' = \frac{2l_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{2l_2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (2, 7)$$

annehmen. Die Drehung führt also zu einer Änderung des Wegunterschiedes und daher zu einer Verschiebung der Interferenzstreifen, die man unmittelbar zu beobachten versucht.

Als minimalen Wert von v hätte man beim MICHELSON-Versuch die der Bewegung der Erde um die Sonne entsprechende Geschwindigkeit vom Betrag $v \approx 30$ km/sec zu betrachten. Die Dimensionierung und sonstige Einzelheiten des Interferometers waren so getroffen, daß sogar ein Zehntel der diesem Wert von v entsprechenden Verschiebung der Interferenzstreifen beobachtbar wäre. Das Ergebnis war aber negativ. Sowohl bei dem MICHELSON-Versuch als auch bei mehreren nachträglichen Wiederholungen des Versuches war keine mit Sicherheit festzustellende Interferenzverschiebung nachzuweisen.

§ 3. Das Relativitätsprinzip

Wie wir am Ende des § 1 gesehen haben, folgt die Hypothese des absoluten Koordinatensystems aus derjenigen der absoluten Zeit. Daher spricht der negative Ausfall aller optischen und elektromagnetischen Versuche, die man zum Nachweis des absoluten Koordinatensystems ausgeführt hat, nicht nur gegen die Hypothese des absoluten Koordinatensystems, sondern auch gegen die Hypothese der absoluten Zeit selbst. Nachdem EINSTEIN diesen Zusammenhang klar erkannt hatte, wandte er sich einer kritischen Analyse des Begriffs der absoluten Zeit zu. Es war dann leicht einzusehen, daß die Hypothese der absoluten Zeit mit der folgenden einfacheren Hypothese gleichwertig ist: Es gibt Signale, die sich im Raum mit unendlich großer Geschwindigkeit fortpflanzen; mit deren Hilfe kann man dann Uhren, die an verschiedenen Punkten des Raumes liegen, miteinander vergleichen und auf die absolute Zeitskala einstellen.

In Wirklichkeit sind die besten Signale, die uns heute für diesen Zweck zur Verfügung stehen, die optischen oder elektromagnetischen Signale. Diese Signale pflanzen sich mit einer Geschwindigkeit fort, welche sehr groß — oder, wie wir auch sagen können, praktisch unendlich groß — ist, im Ver-

gleich zu den Geschwindigkeiten, die bei den gewöhnlichen makrophysikalischen Vorgängen vorkommen. Für solche Vorgänge sollte also der Begriff der absoluten Zeit ausreichen. In der Tat werden diese Vorgänge durch die NEWTONsche Mechanik ganz befriedigend beschrieben.

Es gibt aber auch andere Vorgänge, bei denen Teilchen vorkommen, die sich mit Geschwindigkeiten bewegen, welche der Lichtgeschwindigkeit nahe kommen. Wenn wir auch diese Erscheinungen mit Hilfe der absoluten Zeit zu beschreiben versuchen, dann ist dies mit der Einführung der Annahme gleichwertig, daß es Signale gibt, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit viel größer als die Lichtgeschwindigkeit ist.

Den negativen Ausfall aller Versuche, die Existenz eines absoluten Koordinatensystems nachzuweisen, deutete nun EINSTEIN als Widerlegung der Existenz solcher sich mit beliebig großen Geschwindigkeiten fortplanzender Signale. Daher fordert EINSTEIN, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum die größte in der Natur vorkommende Geschwindigkeit sei. Diese Forderung ist im wesentlichen mit seinem im Jahre 1905 aufgestellten *Relativitätsprinzip* gleichwertig, welches man gewöhnlich folgendermaßen formuliert: *Es ist unmöglich, auf Grund irgendwelcher physikalischer Erscheinungen ein absolutes Koordinatensystem zu bestimmen.*

Nach diesem Prinzip sind alle gegeneinander gleichförmig-translatorisch bewegten Koordinatensysteme einander *völlig gleichwertig*, d. h., sie sind einander gleichwertig nicht nur in bezug auf rein mechanische oder optische und elektromagnetische Vorgänge, sondern ganz allgemein in bezug auf *irgendwelche* physikalische Vorgänge. Aus diesem Prinzip folgt im wesentlichen die ganze spezielle Relativitätstheorie, wie wir in den weiteren Kapiteln dieses Buches ausführlich zeigen werden.

Auf das spezielle Phänomen der Lichtfortpflanzung im Vakuum angewandt, besagt das Relativitätsprinzip, daß diese Fortpflanzung in *jedem* Inertialsystem isotrop ist. Dann muß man aber unbedingt die Hypothese der absoluten Zeit fallen lassen. Nach dem Relativitätsprinzip wird man also beim Übergang von einem Koordinatensystem (x, y, z) zu einem anderen, relativ zum ersten sich gleichförmig-translatorisch bewegenden System (x', y', z') eine neue Zeit t' einführen müssen, welche von der im (x, y, z) verwendeten Zeit t verschieden ist. Der Zusammenhang zwischen t' , t und den Raumkoordinaten (x', y', z') und (x, y, z) ist durch die LORENTZ-Transformation beschrieben, welche sich aus der Diskussion der mathematischen Formulierung des Relativitätsprinzips unmittelbar ergeben wird.

Es sei hier noch bemerkt, daß nach dem Relativitätsprinzip die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen denselben Wert haben muß. Anderenfalls könnte sie nämlich einen minimalen oder maximalen Wert besitzen. Dann wäre aber das Koordinatensystem, in welchem die Lichtgeschwindigkeit diesen extremalen Wert besitzt, durch eben diese Eigenschaft ausgezeichnet, im Widerspruch zum Relativitätsprinzip.

Wir kommen jetzt zu der mathematischen Formulierung des Relativitätsprinzips. Seien (x, y, z) und (x', y', z') zwei Inertialsysteme, die sich gegen-

einander gleichförmig-translatorisch bewegen. Die Achsenrichtungen seien z. B. parallel zueinander und die Translationsgeschwindigkeit parallel der x -Achse gewählt (Fig. 1). Die von einem in (x, y, z) ruhenden Beobachter verwendete Zeit sei mit t bezeichnet; dagegen verwende ein in (x', y', z') ruhender Beobachter die Zeit t' . Nach dem Relativitätsprinzip kann die Beziehung $t' = t$ nicht mehr gelten. Statt dessen werden jetzt alle vier Größen x', y', z' und t' Funktionen der ungestrichenen Größen x, y, z, t sein.

Über die Anfangspunkte der Zeitskalen t und t' dürfen wir frei verfügen. Wir setzen $t = t' = 0$ gerade für den Augenblick, in dem die zwei Koordinatensysteme zusammenfallen. In diesem Augenblick denken wir uns nun von dem gerade dann gemeinsamen Ursprung beider Koordinatensysteme ein Lichtsignal emittiert. Nach dem Relativitätsprinzip wird sich dieses Signal in beiden Koordinatensystemen isotrop fortpflanzen. Im Koordinatensystem (x, y, z) werden also die an einem späteren Augenblick $t > 0$ vom Signal erreichten Punkte auf einer Kugelfläche liegen, deren Radius ct ist. Dies ist die Kugelfläche mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (3, 1)$$

Ebenso wird im Koordinatensystem (x', y', z') in einem Augenblick $t' > 0$ das Signal die Punkte der Kugelfläche

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (3, 2)$$

erreichen. Es sei noch bemerkt, daß die Beziehungen (3, 1) und (3, 2) auch für den Fall gelten, daß die zwei Koordinatensysteme beliebig zueinander gerichtete Achsen sowie eine beliebig gerichtete relative Geschwindigkeit haben. Es ist nur notwendig, daß die Anfangspunkte der Koordinatensysteme im Augenblick $t = t' = 0$ zusammenfallen.

Nun sind x', y', z' und t' noch unbekannte Funktionen von x, y, z und t . Denken wir uns diese Funktionen in (3, 2) eingesetzt, so muß daraus eine der Gleichung (3, 1) äquivalente Beziehung entstehen, da ja die zwei Gleichungen (3, 1) und (3, 2) die Fortpflanzung desselben Lichtsignals beschreiben. Berücksichtigt man noch die Tatsache, daß die linken Seiten von (3, 1) und (3, 2) dieselben physikalischen Dimensionen haben, so sieht man leicht, daß man folgende Identität zu fordern hat¹⁾:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2). \quad (3, 3)$$

Gleichung (3, 3) stellt noch nicht die vollständige Formulierung des Relativitätsprinzips dar. In dieser Gleichung nimmt nämlich der Ursprung der zwei Koordinatensysteme am Zeitpunkt $t = t' = 0$ eine ausgezeichnete Stellung ein, welche aber nur die Folge einer willkürlichen Wahl ist und keiner wirklichen Auszeichnung dieses Punktes entspricht. Die Emission des unserer

¹⁾ Falls man in beiden Koordinatensystemen dieselbe Längeneinheit benutzt; sonst hätte man die Identität

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2),$$

wobei λ eine Konstante ist.

Betrachtung zugrunde liegenden Lichtsignals kann ja an einem beliebigen Punkt und zu einer beliebigen Zeit stattfinden. Die entsprechende Verallgemeinerung von (3, 3) bietet keine Schwierigkeit. Bezeichnen wir die Koordinaten dieses jetzt beliebigen Punktes in den zwei Koordinatensystemen mit (x_0, y_0, z_0) bzw. (x'_0, y'_0, z'_0) und den Zeitpunkt der Emission mit t_0 bzw. t'_0 , so wird die Verallgemeinerung von (3, 3)

$$\begin{aligned} & (x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 - c^2(t' - t'_0)^2 \\ & \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2. \end{aligned} \quad (3, 4)$$

Diese Gleichung stellt die vollständige mathematische Formulierung des Relativitätsprinzips dar. Sie erlaubt, wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden, den funktionellen Zusammenhang zwischen x', y', z', t' und x, y, z, t zu ermitteln.

§ 4. Die LORENTZ-Transformation

Die Formel (3, 4) können wir auch auf den Fall zweier unendlich benachbarter Punkte (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ anwenden. Ist auch $t - t_0$ infinitesimal, so geht (3, 4) in folgende differentielle Form über:

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (4, 1)$$

Aus dieser Beziehung folgt zunächst, daß die Größen x', y', z' und t' lineare Funktionen von x, y, z und t sein müssen. Um das zu beweisen, führen wir folgende in der Relativitätstheorie übliche Bezeichnung ein:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3; \quad ct = x_4. \quad (4, 2)$$

Dann gilt die Beziehung

$$dx'_\alpha = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} dx_\mu \quad \text{für } \alpha = 1, 2, 3, 4. \quad (4, 3)$$

Führt man (4, 3) in (4, 1) ein und berücksichtigt, daß es sich um eine Identität handelt, so folgen daraus — durch Gleichsetzen der auf beiden Seiten auftretenden Koeffizienten von dx^2, dy^2 usw. sowie von $dx dy, dy dz$ usw. — die zehn Beziehungen

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_i}{\partial x_\beta} - \frac{\partial x'_4}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_4}{\partial x_\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4). \quad (4, 4)$$

Dabei hat $\eta_{\alpha\beta}$ die Bedeutung

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \quad \eta_{44} = -1, \quad \eta_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{wenn } \alpha \neq \beta. \quad (4, 5)$$

Wir differenzieren nun Gl. (4, 4) nach x_γ :

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} + \frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma} \frac{\partial x'_i}{\partial x_\beta} \right) - \left(\frac{\partial x'_4}{\partial x_\alpha} \frac{\partial^2 x'_4}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} + \frac{\partial^2 x'_4}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma} \frac{\partial x'_4}{\partial x_\beta} \right) = 0$$

($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4$). (4, 6)

Diese Beziehung läßt sich noch vereinfachen. Schreiben wir sie nämlich noch zweimal nach zyklischer Vertauschung von α, β, γ hin,

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_\gamma \partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_\beta \partial x_\alpha} \frac{\partial x'_i}{\partial x_\gamma} \right) - \left(\frac{\partial x'_4}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 x'_4}{\partial x_\gamma \partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 x'_4}{\partial x_\beta \partial x_\alpha} \frac{\partial x'_4}{\partial x_\gamma} \right) = 0, \quad (4, 6a)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_\gamma} \frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_\gamma \partial x_\beta} \frac{\partial x'_i}{\partial x_\alpha} \right) - \left(\frac{\partial x'_4}{\partial x_\gamma} \frac{\partial^2 x'_4}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 x'_4}{\partial x_\gamma \partial x_\beta} \frac{\partial x'_4}{\partial x_\alpha} \right) = 0, \quad (4, 6b)$$

addieren dann (4, 6) und (4, 6 b) und subtrahieren davon (4, 6 a), so folgt

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} - \frac{\partial x'_4}{\partial x_\alpha} \frac{\partial^2 x'_4}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} = 0. \quad (4, 7)$$

Berücksichtigen wir noch die allgemeine Beziehung

$$\sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\varrho} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x'_\varrho} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mu = \varrho, \\ 0, & \text{wenn } \mu \neq \varrho, \end{cases} \quad (\mu, \varrho = 1, 2, 3, 4), \quad (4, 8)$$

so folgt aus (4, 7), wenn man mit $\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\varrho}$ multipliziert und über α summiert,

$$\frac{\partial^2 x'_\varrho}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} = 0 \quad (\varrho, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4). \quad (4, 9)$$

Da nach (4, 9) die x'_ϱ lineare Funktionen von x_β sind, stellt der Übergang von den ungestrichenen zu den gestrichenen Koordinaten die Überlagerung einer Änderung der Achsenrichtungen und einer gleichförmigen Translation dar. Wir wollen aber hier nicht diese allgemeine Überlagerung betrachten, sondern nur die gleichförmige Translation, welche der Fig. 1 entspricht: Neue Achsen $O'x', O'y', O'z'$ parallel zu Ox, Oy, Oz und Translationsgeschwindigkeit parallel zu Ox . Die Rechnung läßt sich in diesem Fall mit Hilfe der Formel (3, 3) durchführen. Es ist zunächst leicht einzusehen, daß in diesem Fall

$$y' = y, \quad z' = z$$

sein muß. Es bleibt also nur die Forderung

$$x'^2 - c^2 t'^2 \equiv x^2 - c^2 t^2, \quad (4, 10)$$

welche wegen (4, 9) durch lineare Transformationsformeln,

$$\left. \begin{aligned} x' &= \mu x + \nu t, \\ ct' &= \varrho x + \sigma t, \end{aligned} \right\} (4, 11)$$

(mit konstanten Koeffizienten $\mu, \nu, \varrho, \sigma$) zu erfüllen ist. Wenn man (4, 11) in (4, 10) einsetzt, so erhält man drei Bedingungen für die vier Konstanten μ bis σ , so daß schließlich nur noch eine frei verfügbare Konstante bleibt. Das Ergebnis sei hier gleich in seiner endgültigen Form,

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ ct' &= \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \right\} (4, 12)$$

mit der Abkürzung

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (4, 13)$$

angegeben. Das sind die Formeln der LORENTZ-Transformation, welche für die spezielle Relativitätstheorie von grundlegender Bedeutung sind.

Der Vergleich von (4, 12) mit (1, 2) und (1, 3) zeigt, daß die LORENTZ-Transformation in die GALILEISCHE übergeht, wenn man β gegen Null (d. h. bei vorgegebenem v, c gegen unendlich) streben läßt. Insbesondere geht dann die letzte der Gleichungen (4, 12) in (1, 3) über:

$$t' = t,$$

was nochmals die Tatsache zum Ausdruck bringt, daß für die Definition einer absoluten Zeit die Existenz von Signalen erforderlich ist, die sich mit unendlich großer Geschwindigkeit fortpflanzen.

Ferner zeigt der Vergleich mit der GALILEI-Transformation, daß die in der LORENTZ-Transformation enthaltene Konstante v mit der relativen Translationsgeschwindigkeit der zwei Koordinatensysteme übereinstimmt. Das kann man übrigens auch unmittelbar aus (4, 12) entnehmen. Setzt man nämlich $x = 0$, so folgt

$$x = -\frac{vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

also, wenn man t eliminiert,

$$x' = -vt'.$$

Der Ursprung des ungestrichenen Koordinatensystems bewegt sich also im gestrichenen Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit $-v$ in die Richtung der x' -Achse. Es ist zu fordern, daß der Ursprung des gestrichenen Koordinatensystems in bezug auf das ungestrichene mit der entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeit sich bewegt. Die Transformationsformeln für den Übergang vom gestrichenen Koordinatensystem zum ungestrichenen müssen also aus (4, 12) in der Weise entstehen, daß man in (4, 12) die gestrichenen und ungestrichenen Größen miteinander vertauscht und gleichzeitig v durch $-v$ (und β durch $-\beta$) ersetzt. Das Ergebnis lautet

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ ct &= \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} (4, 14)$$

Wie man leicht verifiziert, stellen die Beziehungen (4, 14) tatsächlich das Ergebnis der Auflösung von (4, 12) nach den ungestrichenen Größen x, y, z, t dar.

Die Beziehungen (4, 12) bzw. (4, 14) bringen noch die wichtige Tatsache zum Ausdruck, daß die Translationsgeschwindigkeit v immer kleiner als c sein muß. Für $v = c$ verlieren nämlich die erste und vierte dieser Gleichungen ihren Sinn, und für $v > c$ hätten wir durch (4, 12) den reellen Größen x, t rein imaginäre Größen x', t' zugeordnet. Dieses Ergebnis ist eine erste Folge der schon in § 3 gestellten Forderung der speziellen Relativitätstheorie, wonach die Lichtgeschwindigkeit die obere Grenze aller physikalisch möglichen Geschwindigkeiten darstellt. Die genaue dynamische Bedeutung dieser Forderung werden wir im nächsten Kapitel bei der Formulierung der relativistischen Dynamik kennenlernen.

In historischer Hinsicht sei noch bemerkt, daß die Formeln (4, 12) von LORENTZ im Jahre 1904, also kurz vor Aufstellung des EINSTEINSCHEN Relativitätsprinzips, gefunden wurden. Zu diesen Formeln wurde LORENTZ durch Betrachtungen über die Transformationseigenschaften der MAXWELLSCHEN Gleichungen des elektromagnetischen Feldes geführt. Diese Gleichungen sind gegen die GALILEI-Transformation nicht invariant; die LORENTZSCHE Diskussion ergab, daß sie gegen die Transformation (4, 12) invariant sind. Da man aber noch an der Annahme der absoluten Zeit festhielt, mußte LORENTZ sein Ergebnis in einer ziemlich komplizierten Weise deuten: Im Grunde genommen sollten die MAXWELLSCHEN Gleichungen nur im absoluten Koordinatensystem (x, y, z) gelten, trotzdem aber auch in anderen Inertial-

systemen verwendbar sein, sofern man dann statt der „wahren“ (absoluten) Zeit t die „Hilfszeit“ t' in die für das absolute Koordinatensystem geltende Form dieser Gleichungen einführt. Erst das Relativitätsprinzip hat die Lage völlig geklärt, indem es zeigte, daß jedem Koordinatensystem eine entsprechende Zeitskala zuzuordnen ist. Die Invarianz der MAXWELLSchen Gleichungen gegen die LORENTZ-Transformation werden wir im Kapitel III ausführlich beweisen.

§ 5. Die Längenkontraktion

Wir betrachten einen starren Maßstab, welcher in einem Inertialsystem, dessen Koordinaten und Zeit wir mit x', y', z' und t' bezeichnen, auf der x' -Achse liegend ruht. Seine Enden haben also die von der Zeit unabhängigen Koordinatenwerte x'_1 und x'_2 . In einer graphischen Darstellung auf der Ebene (x', t') beschreiben beide Endpunkte die zur t' -Achse parallelen Geraden g'_1 und g'_2 (Fig. 3 a). Für einen in diesem Koordinatensystem ruhenden Beobachter ist die Länge des Maßstabes

$$l_0 = x'_2 - x'_1. \quad (5, 1)$$

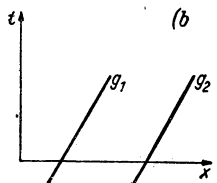


Fig. 3

Der Index $_0$ bei l soll die Tatsache zum Ausdruck bringen, daß der Maßstab in dem betreffenden Koordinatensystem ruht.

Wir denken uns nun einen zweiten Beobachter, welcher in dem durch (4, 14) definierten Koordinatensystem (x, y, z, t) ruht. Relativ zu ihm bewegt sich der Maßstab mit der zur x -Achse parallelen Geschwindigkeit v . Die genaue Beschreibung der Bewegung der Endpunkte des Maßstabes läßt sich mit Hilfe von (4, 14) unmittelbar angeben. Einem Punkt (x'_1, t'_1) der Geraden g'_1 entspricht nach (4, 14) in der x, t -Ebene der Punkt

$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad ct_1 = \frac{ct'_1 + \beta x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5, 2)$$

Dabei ist x'_1 eine Konstante, während t'_1 als ein Parameter aufgefaßt werden kann. Die Gleichungen (5, 2) stellen eine Gerade g_1 der x, t -Ebene dar (Fig. 3 b), welche aber nicht mehr der t -Achse parallel ist, entsprechend der Tatsache, daß der betreffende Endpunkt des Maßstabes sich in diesem Koordinatensystem bewegt. Ähnlich wird die Bewegung des anderen Endpunktes des Maßstabes durch die zu g_1 parallele Gerade g_2 mit den Gleichungen

$$x_2 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad ct_2 = \frac{ct'_2 + \beta x'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5, 3)$$

dargestellt (Parameter t'_2).

Der im Koordinatensystem (x, y, z, t) ruhende Beobachter wird die Länge des Maßstabes in der für bewegte Objekte üblichen Weise definieren müssen, nämlich als den Unterschied der x -Werte derjenigen Lagen seiner Endpunkte, welche einem und demselben Zeitpunkt entsprechen. Dabei muß man aber berücksichtigen, daß im ungestrichenen Koordinatensystem die Zeit t gilt. Die Länge wird also durch

$$l = x_2 - x_1 \quad (5, 2)$$

mit der Nebenbedingung

$$t_2 = t_1 \quad (5, 4a)$$

definiert. Führen wir jeweils die zweite von Gleichung (5, 2) und (5, 3) in (5, 4a) ein, so folgt

$$t'_2 - t'_1 = \frac{\beta}{c} (x'_1 - x'_2).$$

Dies, zusammen mit den ersten Gleichungen (5, 2) und (5, 3) in (5, 4) eingesetzt, ergibt

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (5, 5)$$

Diese Formel besagt, daß ein Beobachter, relativ zu dem sich der Maßstab mit einer seiner Längsrichtung parallelen Geschwindigkeit v bewegt, eine um den Faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$ kleinere Länge findet als ein Beobachter, der relativ zum Maßstab ruht. Die Größe l_0 bezeichnen wir als die *Ruhlänge* des Maßstabes.

Die Beziehung (5, 5) wurde schon vor Aufstellung des Relativitätsprinzips von LORENTZ und FITZGERALD vorgeschlagen, als Ausdruck einer von ihnen postulierten Längenkontraktion, welche immer dann auftreten müßte, wenn sich der Stab gegen das absolut ruhende Koordinatensystem mit einer seiner Längsrichtung parallelen Geschwindigkeit bewegt. Durch diese Hypothese sollte der negative Ausfall des MICHELSON-Versuches ohne Abänderung der vorrelativistischen Begriffe von Raum und Zeit erklärt werden. Man bemerke, daß diese Deutung der Beziehung (5, 5) von der in der speziellen Relativitätstheorie geltenden grundsätzlich verschieden ist. Nach dem Relativitätsprinzip sind nämlich alle Koordinatensysteme einander völlig gleichwertig, und die Unterschiede der von verschiedenen Beobachtern gemessenen Längen eines und desselben Maßstabes sind lediglich eine Folge der Notwendigkeit, in jedem Inertialsystem eine entsprechende Zeitskala zu definieren.

Es ist leicht einzusehen, daß ein zur x -Richtung senkrecht stehender Maßstab beim Übergang vom gestrichenen zum ungestrichenen Koordinatensystem keine Längenänderung aufweist: Die Längenkontraktion tritt nur bei einer Translationsgeschwindigkeit in Längsrichtung des Maßstabes ein. Daraus folgt weiter, daß das Volumen eines Körpers bei Translationsbewegungen sich um den Faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$ ändert. Ist also V_0 das Ruhvolumen des Körpers, d. h. sein Volumen, gemessen von einem relativ zum Körper

ruhenden Beobachter, so wird das von einem relativ zum Körper mit einer Geschwindigkeit v bewegten Beobachter gemessene Volumen

$$V = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (5, 6)$$

Diese Volumkontraktion tritt offenbar bei beliebiger Richtung der Translationsgeschwindigkeit auf.

§ 6. Die Zeitdilatation

Betrachten wir nun einen Vorgang, der, wenn wir ihn auf das Inertialsystem (x', y', z', t') beziehen, sich an einem festen Raumpunkt (x', y', z') abspielt. Der Vorgang beginne im Zeitpunkt t'_1 und ende im Zeitpunkt t'_2 . Dann ist die Dauer des Vorgangs für einen Beobachter, der ebenfalls im Koordinatensystem (x', y', z', t') ruht,

$$\Delta t_0 = t'_2 - t'_1. \quad (6, 1)$$

Den gleichen Vorgang können auch andere Beobachter verfolgen, welche in anderen Koordinatensystemen ruhen. Wir wollen insbesondere den Ablauf des Vorgangs für einen Beobachter betrachten, der in dem mit (x', y', z', t') durch die Gleichungen (4, 14) verbundenen Koordinatensystem (x, y, z, t) ruht. Den Werten $x'_1 = x'$ und t'_1 , welche den Anfang des Vorgangs im gestrichenen Koordinatensystem bestimmen, entsprechen nach (4, 14) die Werte

$$x_1 = \frac{x' + vt'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad ct_1 = \frac{ct'_1 + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6, 2)$$

Ähnlich finden wir für das Ende des Vorgangs, welches im gestrichenen Koordinatensystem durch $x'_2 = x'$ und t'_2 bestimmt wird,

$$x_2 = \frac{x' + vt'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad ct_2 = \frac{ct'_2 + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6, 3)$$

Für den im ungestrichenen Koordinatensystem ruhenden Beobachter ist die Dauer des Vorgangs durch

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (6, 4)$$

gegeben. Führen wir in (6, 4) die durch die zweiten Gleichungen (6, 2) und (6, 3) bestimmten Werte von t_2 und t_1 ein, so ergibt sich

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6, 5)$$

Die von einem Beobachter gemessene Dauer eines Vorgangs hängt also vom Bewegungszustand des Beobachters ab. Sie hat ihren kleinsten Wert für

diejenigen Beobachter, für welche sich der Vorgang an einem festen Raumpunkt abspielt, oder — wie wir auch sagen können — in dem diesem Vorgang entsprechenden *Ruhsystem*. In jedem anderen Koordinatensystem ist die Dauer des Vorgangs um den Faktor $(1 - \beta^2)^{-1/2}$ größer. In diesem Sinne sprechen wir von einer *Zeitdilatation*, welche dann auftritt, wenn wir vom Ruhsystem zu einem anderen Koordinatensystem übergehen.

Die Zeitdilatation stellt eine Folgerung aus dem Relativitätsprinzip dar, die vom Standpunkt der vorrelativistischen Begriffe von Raum und Zeit völlig unverständlich ist. Deshalb ist es von besonderer Bedeutung, daß man die Zeitdilatation beim Studium der Mesonkomponente der kosmischen Strahlung unmittelbar beobachten konnte. Mesonen sind instabile Teilchen, welche bei gewissen Stoßprozessen erzeugt werden und dann etwas später in andere Teilchen zerfallen. Mesonen einer bestimmten Art sind durch einen bestimmten Wert Δt_0 der Lebensdauer im Ruhsystem charakterisiert. Für die nicht allzu kurzlebigen Mesonenarten kann man Δt_0 mit guter Genauigkeit messen, indem man Beobachtungen an solchen Mesonen vornimmt, die kurz nach ihrer Entstehung gebremst und so im Laboratoriumskordinatensystem zur Ruhe gebracht werden.

Mesonen werden von den primären Teilchen der kosmischen Strahlung in allen Schichten der Erdatmosphäre erzeugt und vorzugsweise nach unten geschleudert. Wenn es nun keine Zeitdilatation gäbe, dann würden wir am Meeresniveau nur Mesonen beobachten, deren Erzeugungsort die maximale Höhe $c\Delta t_0$ nicht übersteigt, da ihre Geschwindigkeit nicht größer als c sein kann. Die Analyse der Beobachtungsdaten zeigt aber, daß uns in Wirklichkeit Mesonen erreichen, welche Entfernungen durchlaufen haben, die viel größer als $c\Delta t_0$ sind.

Diese Erscheinung wird nun auf Grund der Formel (6, 5) für die Zeitdilatation unmittelbar verständlich. Die Mesonen werden nämlich in der Regel mit hoher kinetischer Energie erzeugt, was nach der im nächsten Kapitel zu entwickelnden relativistischen Dynamik zur Folge hat, daß sie sich mit einer Geschwindigkeit v bewegen, die sehr nahe bei c liegt. Das Verhältnis $\beta = \frac{v}{c}$ liegt also sehr nahe bei 1, und deshalb wird nach (6, 5) $\Delta t \gg \Delta t_0$. Zu demselben Ergebnis kommt man übrigens auch auf einem anderen Wege. Subtrahiert man nämlich die erste der Gleichungen (6, 2) von der ersten (6, 3), so ergibt sich

$$x_2 - x_1 = \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} (t'_2 - t'_1) = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} c \Delta t_0. \quad (6, 6)$$

Die Wegstrecke, die das Meson im Koordinatensystem (x, y, z, t) durchläuft, ist also nicht einfach gleich $v\Delta t_0$, sondern hat noch den Faktor $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, welcher für $\beta \rightarrow 1$ gegen unendlich strebt.

§ 7. Transformation der Geschwindigkeit

Legt man ein bestimmtes Inertialsystem (x, y, z, t) zugrunde, so ist die Bewegung eines Teilchens bestimmt, wenn man seine Koordinaten x, y, z als Funktionen der Zeit angeben kann:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (7, 1)$$

Wir wollen nun diese Bewegung in dem durch die Transformationsformeln (4, 12) bestimmten neuen Inertialsystem (x', y', z', t') betrachten. Die drei ersten Gleichungen (4, 12),

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (7, 2)$$

geben x', y' und z' als Funktionen von t an. Die vierte Gleichung (4, 12) liefert dann, wenn man noch die erste von (7, 1) berücksichtigt, t' als Funktion von t :

$$ct' = \frac{ct - \beta x(t)}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7, 3)$$

Bei gegebener Funktion $x(t)$ kann man (7, 3) nach t auflösen, d. h. t als Funktion von t' bestimmen:

$$t = t(t'). \quad (7, 3a)$$

Unter Berücksichtigung von (7, 3a) geben dann die Gleichungen (7, 2) die neuen Koordinaten x', y', z' als Funktionen der in dem jetzt verwendeten Inertialsystem geltenden Zeit t' an.

Mit Hilfe von (7, 2) und (7, 3) kann man die Geschwindigkeitskomponenten des Teilchens im zweiten Koordinatensystem,

$$q'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad q'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad q'_z = \frac{dz'}{dt'}, \quad (7, 4)$$

aus denjenigen im ursprünglichen Koordinatensystem,

$$q_x = \frac{dx}{dt}, \quad q_y = \frac{dy}{dt}, \quad q_z = \frac{dz}{dt}, \quad (7, 5)$$

berechnen. Man findet nämlich aus (7, 2)

$$q'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (q_x - v) \frac{dt}{dt'}, \quad q'_y = q_y \frac{dt}{dt'}, \quad q'_z = q_z \frac{dt}{dt'}.$$

Andererseits folgt aus (7, 3)

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(1 - \beta \frac{q_x}{c} \right),$$

und daher schließlich

$$\left. \begin{aligned} q'_x &= \frac{q_x - v}{1 - \beta \frac{q_x}{c}}, \\ q'_y &= \frac{q_y}{1 - \beta \frac{q_x}{c}} \sqrt{1 - \beta^2}, \\ q'_z &= \frac{q_z}{1 - \beta \frac{q_x}{c}} \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7, 6)$$

Diese Formeln stellen das EINSTEINSche *Additionstheorem der Geschwindigkeiten* dar.

Führen wir noch den absoluten Betrag q bzw. q' der Geschwindigkeit ein:

$$q^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2, \quad q'^2 = q_x'^2 + q_y'^2 + q_z'^2, \quad (7, 7)$$

so lassen sich aus (7, 6) durch unmittelbare Rechnung folgende Beziehungen ableiten:

$$\left(1 + \beta \frac{q'_x}{c}\right) \left(1 - \beta \frac{q_x}{c}\right) = 1 - \beta^2, \quad (7, 8)$$

$$\frac{c^2 - q'^2}{1 + \beta \frac{q'_x}{c}} = \frac{c^2 - q^2}{1 - \beta \frac{q_x}{c}}. \quad (7, 9)$$

Die beiden letzten Gleichungen lassen eine wichtige Anwendung zu. Nehmen wir an, daß im ungestrichenen Koordinatensystem das Teilchen sich mit einer Geschwindigkeit bewegt, welche die Lichtgeschwindigkeit nicht übersteigt:

$$q \leq c.$$

Berücksichtigen wir noch, daß die LORENTZ-Transformation nur für $\beta < 1$ sinnvoll ist, so folgt zunächst aus (7, 8) — weil in dieser Gleichung die rechte Seite und der zweite Faktor der linken Seite positiv sind —, daß auch der erste Faktor positiv ist. Weiter folgt dann aus (7, 9), da die rechte Seite nicht negativ werden kann und der Nenner der linken Seite positiv ist, daß

$$q' \leq c.$$

Dieses Ergebnis zeigt, daß die LORENTZ-Transformation, aus der ja die Formeln (7, 6) unmittelbar folgten, mit der in § 3 gestellten Forderung, wonach die Lichtgeschwindigkeit die obere Grenze aller physikalisch möglichen Geschwindigkeiten darstellen muß, verträglich ist: Es ist nicht möglich, von einer Unterlichtgeschwindigkeit ausgehend, durch eine LORENTZ-Transformation zu einer Überlichtgeschwindigkeit zu gelangen.

Insbesondere folgt aus (7, 9), daß, wenn $q = c$, dann auch $q' = c$ ist: Ein Teilchen, das sich in einem Koordinatensystem mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, hat diese Eigenschaft auch in irgendwelchen anderen Koordinatensystemen. Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, sind vor allem die Photonen, in die man sich in der atomistischen Beschreibung ein Lichtbündel aufgespaltet denkt, solange sich dieses im Vakuum fortpflanzt. Daß diese Photonen sich mit Lichtgeschwindigkeit in *allen* Koordinatensystemen bewegen, ist dann einfach der in § 3 erwähnten Folge des Relativitätsprinzips gleichwertig, wonach sich das Licht im Vakuum in allen Koordinatensystemen mit der Geschwindigkeit c fortpflanzt.

Wir betrachten noch eine geradlinige Bewegung parallel der x -Achse. Dann ist

$$q_y = q_z = 0,$$

und daher reduziert sich (7, 6) auf

$$q'_x = \frac{q_x - v}{1 - \beta \frac{q_x}{c}} \quad (q'_y = q'_z = 0). \quad (7, 10)$$

Von dieser Formel werden wir eine wichtige Anwendung geben. Wir betrachten ein für Licht durchsichtiges Medium (z. B. Wasser), das im Koordinatensystem (x, y, z, t) ruht und in welchem sich ein Lichtbündel in Richtung der x -Achse fortpflanzt. Ist n der Brechungsindex des Mediums, so ist die Lichtgeschwindigkeit in diesem Medium

$$q = q_x = \frac{c}{n}. \quad (7, 11)$$

Wir stellen uns nun die Frage, mit welcher Geschwindigkeit sich das Lichtbündel fortpflanzen wird, wenn das Wasser ebenfalls parallel der x -Achse mit einer (konstanten) Geschwindigkeit V strömt. Für die Beantwortung dieser Frage genügt es zu bemerken, daß das Wasser in einem anderen Koordinatensystem ruht. Bezeichnen wir dieses zweite Koordinatensystem mit (x, y, z, t) , so wird in ihm die Geschwindigkeit der Lichtfortpflanzung durch (7, 11) gegeben. Die Geschwindigkeit bei strömendem Wasser ist dann durch (7, 10) bestimmt, wenn man in dieser Beziehung $v = -V$ setzt. Also

$$q' = q'_x = \frac{q_x + V}{1 + \frac{Vq_x}{c^2}}. \quad (7, 12)$$

Diese Formel läßt sich noch vereinfachen, wenn man bedenkt, daß die experimentell erreichbaren Strömungsgeschwindigkeiten V immer sehr klein gegen c sind. Man findet dann

$$q' \approx (q_x + V) \left(1 - \frac{Vq_x}{c^2} \right) \approx q_x + V \left(1 - \frac{q_x^2}{c^2} \right).$$

Also, wegen (7, 11)

$$q'_x \approx q_x + V \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (7, 13)$$

Durch die Strömung wird also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes geändert. Die Änderung ist aber nicht gleich der Geschwindigkeit V des durchsichtigen Mediums, sondern um den Faktor $1 - \frac{1}{n^2}$ kleiner.

Die Richtigkeit der Formel (7, 13) wurde experimentell von FIZEAU nachgewiesen. Es ist interessant, daß diese Formel schon lange vor Aufstellung der Relativitätstheorie von FRESNEL auf Grund von speziellen Annahmen über das Verhalten des Äthers in bewegten Körpern abgeleitet wurde. Deshalb wird der Faktor $1 - \frac{1}{n^2}$ als der FRESNELSCHE Mitführungskoeffizient bezeichnet.

Es sei noch bemerkt, daß die nach (7, 13) im allgemeinen anisotrope Fortpflanzung des Lichtes keineswegs im Widerspruch zum Relativitätsprinzip steht. Die dort postulierte isotrope Fortpflanzung bezieht sich nämlich auf das Vakuum, während es sich hier um Fortpflanzung in einem materiellen Medium handelt.

§ 8. Der MINKOWSKISCHE 4-dimensionale Raum

Die weitere Entwicklung der speziellen Relativitätstheorie läßt sich nur dann übersichtlich durchführen, wenn man den von MINKOWSKI eingeführten 4-dimensionalen Raum systematisch verwendet. Wir werden hier diejenigen Begriffe, die für die 4-dimensionale Formulierung der speziellen Relativitätstheorie erforderlich sind, zusammenstellen und ihren physikalischen Sinn erläutern.

Fügt man zu den Koordinaten x, y, z des Raumes die Zeit t als vierte Variable hinzu, so entsteht dadurch eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit: Ein Punkt dieser Mannigfaltigkeit wird durch Angabe von 4 Zahlen — der Werte von x, y, z und t — bestimmt. Physikalisch gibt ein solcher Punkt den Ort eines Ereignisses an zusammen mit der Zeit, zu der es stattgefunden hat. Die Bewegung eines Teilchens wird nach (7, 1) durch eine eindimensionale Folge solcher Punkte, d. h. durch eine *Linie* dieser Mannigfaltigkeit dargestellt. Man pflegt diese Mannigfaltigkeit als die *4-dimensionale Welt* oder auch einfach als den *4-dimensionalen Raum* zu bezeichnen. Ein Punkt bzw. eine Linie dieses Raumes wird ein *Weltpunkt* bzw. eine *Weltlinie* genannt.

Die Vereinigung des gewöhnlichen Raumes mit der Zeit zu einem 4-dimensionalen Raum könnte man auch im Rahmen der NEWTONSchen Mechanik vornehmen. Sie hätte aber dann einen rein formalen Charakter, weil in dem so entstehenden 4-dimensionalen Raum die Zeitachse völlig ausgezeichnet bleibt. Die Zeit hat nämlich in der NEWTONSchen Mechanik eine absolute

Bedeutung, was zur Folge hat, daß man nur Zeittransformationen von der Form

$$t' = t'(t)$$

als physikalisch sinnvoll ansehen darf. Transformationen, bei denen die Zeit ähnlich wie die Koordinaten x, y, z behandelt würde, haben keine physikalische Bedeutung.

In der speziellen Relativitätstheorie ist die Lage grundsätzlich verschieden. Das Relativitätsprinzip ersetzt die absolute Zeit durch eine relative, d. h. durch eine Zeit, die sich beim Übergang zu einem neuen Inertialsystem ändert. Demzufolge tritt in den aus dem Relativitätsprinzip folgenden Formeln der LORENTZ-Transformation die Zeit ähnlich wie die gewöhnlichen Raumkoordinaten auf. Der 4-dimensionale Raum wird also hier keineswegs eine nur formale Verknüpfung der Raumkoordinaten mit der Zeit bedeuten. Vielmehr stellt er, wie durch die folgenden Ausführungen deutlich gezeigt wird, gerade denjenigen Begriff dar, welcher die genaue mathematische Beschreibung des physikalischen Zusammenhanges von Raum und Zeit ermöglicht.

Um dieses Ziel zu erreichen, müssen wir vor allem den 4-dimensionalen Raum mit einer *Metrik* versehen. Darunter verstehen wir eine Formel, welche den *Abstand* zweier Punkte (x_1, y_1, z_1, t_1) und (x_2, y_2, z_2, t_2) bzw. die *Länge* des durch diese zwei Punkte definierten Vektors bestimmt. Diese Formel läßt sich aus dem Relativitätsprinzip durch Verallgemeinerung derjenigen Formel, die für den gewöhnlichen 3-dimensionalen Raum gilt, unmittelbar ableiten. Der 3-dimensionale Raum der NEWTONschen Mechanik ist euklidisch, und man darf bei den Inertialsystemen nur kartesische Koordinaten verwenden. Daher gilt für den Abstand l_{12} der Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) die Formel

$$l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \quad (8, 1)$$

Die wichtigste Eigenschaft der so definierten Länge l_{12} ist, daß sie beim Übergang zu einem anderen kartesischen Koordinatensystem unverändert, oder, wie wir auch sagen, *invariant* bleibt.

Im 4-dimensionalen Raum wollen wir den Abstand der Punkte (x_1, y_1, z_1, t_1) und (x_2, y_2, z_2, t_2) mit s_{12} bezeichnen. Es ist naheliegend zu verlangen, daß s_{12}^2 durch eine Formel gegeben wird, welche zunächst die in (8, 1) eintretenden Terme enthält, zu denen aber jetzt ein vierter für die vierte Dimension des Raumes zu addieren ist. Die grundsätzliche Forderung der Invarianz von s_{12} beim Übergang zu einem anderen Inertialsystem führt dann, in Verbindung mit der das Relativitätsprinzip ausdrückenden Beziehung (3, 4), zu der Formel

$$s_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2. \quad (8, 2)$$

Statt (8, 2) schreibt man oft die Formel für zwei unendlich benachbarte Punkte (x, y, z, t) und $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (8, 3)$$

Der 4-dimensionale Raum mit der durch (8, 2) bzw. (8, 3) definierten Metrik wurde in die spezielle Relativitätstheorie von MINKOWSKI eingeführt und wird der MINKOWSKISCHE Raum genannt.

Das Hauptmerkmal der Formel (8, 2) bzw. (8, 3) ist das negative Vorzeichen des letzten Termes. Der MINKOWSKISCHE Raum ist also nicht euklidisch, sondern, nach einer üblich gewordenen Bezeichnung, *pseudoeuklidisch*. Denselben Sachverhalt drücken wir auch aus, indem wir sagen, daß der MINKOWSKISCHE Raum nicht einfach 4, sondern 3+1 Dimensionen hat. Die Differenz $3-1=2$ heißt die Signatur der Metrik (8, 3).

Wegen des negativen Vorzeichens vor dem Quadrat der Zeitkoordinate sind die Größen s_{μ}^2 bzw. ds^2 nicht mehr positiv definit, sondern können entweder positiv oder negativ oder auch Null werden. Dadurch entsteht eine Einteilung der Verschiebungen oder *Vektoren* des 4-dimensionalen Raumes in drei Klassen. Wir diskutieren die Eigenschaften dieser Klassen für den Fall infinitesimaler Verschiebungen. Die Ergebnisse gelten aber unverändert auch für endliche Verschiebungen.

1. Wenn $ds^2 > 0$ ist, nennen wir die Verschiebung (dx, dy, dz, dt) *raumartig*. Damit meinen wir, daß es möglich ist, durch eine passende LORENTZ-Transformation diese Verschiebung auf die Form

$$(dx', d\tilde{y}', dz', 0) \quad (8, 4)$$

zu bringen, d. h. sie auf eine Verschiebung des gewöhnlichen 3-dimensionalen Raumes mit verschwindender Zeitkomponente zu reduzieren. Man beweist diese Behauptung, indem man zunächst durch eine Drehung des 3-dimensionalen Raumes bei unveränderter Zeit die Verschiebung auf die Form $(dx'', 0, 0, dt)$ bringt. Es ist dann leicht einzusehen, daß man durch eine LORENTZ-Transformation der Form (4, 12) diese Verschiebung auf die Form $(dx''', 0, 0, 0)$ bringen kann¹⁾. In dem Koordinatensystem, in welchem die Verschiebung die Form (8, 4) hat, stellen ihre Endpunkte *A* und *B* gleichzeitige Ereignisse dar. In anderen Inertialsystemen ist aber dt im allgemeinen von Null verschieden und kann, je nach dem verwendeten Koordinatensystem, entweder positiv oder negativ sein. Verschiedene Beobachter werden also die Ereignisse *A* und *B* in verschiedener zeitlicher Reihenfolge beobachten.

2. Wenn $ds^2 < 0$ ist, nennen wir die Verschiebung (dx, dy, dz, dt) *zeitartig*. Es läßt sich nämlich, ganz ähnlich wie im ersten Fall, beweisen, daß man eine Verschiebung mit $ds^2 < 0$ durch eine passende LORENTZ-Transformation auf die Form

$$(0, 0, 0, dt'), \quad (8, 5)$$

d. h. auf eine Verschiebung längs der Zeitachse reduzieren kann. Die charakteristische Eigenschaft einer solchen Verschiebung ist, daß das Vorzeichen

¹⁾ Die allgemeinere Form (8, 4) gewinnt man durch eine weitere Drehung des 3-dimensionalen Raumes.

der Zeitkomponente durch die Transformation nicht geändert werden kann¹⁾. Die zeitliche Reihenfolge der Ereignisse A und B ist also in diesem Fall invariant gegen LORENTZ-Transformationen.

Das wichtigste Beispiel einer zeitartigen Verschiebung ist das Element einer Weltlinie, welche die Bewegung eines Teilchens mit einer Geschwindigkeit $q < c$ darstellt. Es ist nämlich allgemein

$$ds^2 = dt^2 \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - c^2 \right) = dt^2 (q^2 - c^2), \quad (8, 6)$$

so daß aus $q < c$ auch $ds^2 < 0$ folgt. Damit haben wir die charakteristische Eigenschaft der Weltlinien, welche die Bewegung von gewöhnlichen physikalischen Teilchen darstellen, gewonnen: Es sind dies diejenigen Weltlinien, deren Elemente alle zeitartig sind. Ist die Verschiebung (dx, dy, dz, dt) das Element einer solchen Weltlinie, so läßt sie sich nach (8, 5) in einem bestimmten Koordinatensystem in der Form

$$(0, 0, 0, d\tau) \quad (8, 7)$$

schreiben. In diesem letzten Koordinatensystem hat das Teilchen nach (8, 6) eine verschwindende Geschwindigkeit, weshalb wir dieses Koordinatensystem als das *Ruhsystem* des Teilchens für den in Betracht gezogenen Augenblick bezeichnen²⁾. Da $ds^2 < 0$ ist, wird ds rein imaginär und wir können setzen

$$ds = ic d\tau. \quad (8, 8)$$

Die Größe $d\tau$, welche ebenfalls eine Invariante der LORENTZ-Transformation ist, heißt das Intervall der *Eigenzeit* des Teilchens während der Verschiebung (dx, dy, dz, dt) .

3. Wenn $ds^2 = 0$ ist, dann sprechen wir von einer *Nullverschiebung* oder einem *Nullvektor*. Eine solche Verschiebung kann man in keine der zwei früheren Formen (8, 4) oder (8, 5) bringen: In jedem Koordinatensystem hat sie mindestens eine nichtverschwindende Raumkomponente und ebenfalls nichtverschwindende Zeitkomponente. Wie man mit Hilfe der Formel (8, 6) sieht, ist jedes Element einer Weltlinie, welche einem mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Teilchen entspricht, eine Nullverschiebung. Solche Teilchen sind z. B. die Photonen, solange sie sich im Vakuum bewegen. In diesem Fall sind die Bewegungen im 3-dimensionalen Raum geradlinig und daher die sie darstellenden Weltlinien des 4-dimensionalen Raumes gerade

¹⁾ Wenn man an LORENTZ-Transformationen des Typus (4, 12) festhält. Das wesentliche Merkmal dieser Transformation ist, daß in der letzten Formel t und t' beide mit positiven Vorzeichen auftreten. Eine Änderung des Vorzeichens von t' in allen Formeln (4, 12) ist mit der Identität (3, 4) verträglich. Eine solche Änderung würde aber bedeuten, daß der zeitliche Ablauf aller Erscheinungen sich genau umkehrt, was z. B. für thermodynamische Erscheinungen physikalisch unannehmbar ist. Deshalb ist diese Umkehr der Zeit bei allgemeinen Betrachtungen auszuschließen.

²⁾ Nur wenn die Weltlinie eine Gerade ist, wenn also eine geradlinig-gleichförmige Bewegung vorliegt, ist das Ruhsystem des Teilchens für alle Zeiten dasselbe.

Linien. Es sind also nicht nur die unendlich kleinen Elemente dieser Linien, sondern auch deren endliche Teile Nullvektoren. Solche Geraden des MINKOWSKISCHEN Raumes werden *Nulllinien* genannt.

Der spezielle Nullvektor, dessen z -Komponente verschwindet, hängt von zwei Zahlen a und b ab und hat die Form

$$(a, b, 0, \pm \sqrt{a^2 + b^2}). \quad (8, 9)$$

Wenn wir alle Vektoren der Form (8, 9) betrachten, welche den gemeinsamen Anfangspunkt O haben, dann wird von ihnen die Fläche eines Kegels gebildet, dessen Achse die t -Achse ist und dessen Öffnungswinkel 45° beträgt (Fig. 4). Im allgemeinen Falle, in welchem also auch die z -Komponente von Null verschieden sein kann, sagen wir, daß die von O ausgehenden Nullvektoren eine (3-dimensionale) *Hyperkegelfläche* bilden. Da die Nullvektoren die Bewegung von Photonen bzw. die Fortpflanzung von Lichtstrahlen beschreiben, sprechen wir vom *Lichtkegel* des Weltpunktes O . Die den Halbachsen $t > 0$ bzw. $t < 0$ entsprechenden Teile des Lichtkegels von O bezeichnen wir als den positiven Lichtkegel oder einfach Vorkegel bzw. negativen Lichtkegel oder Nachkegel von O .

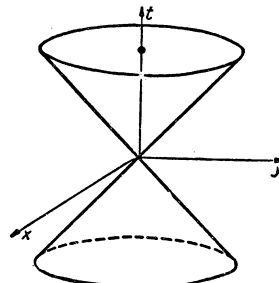


Fig. 4

Durch den Lichtkegel von O wird der MINKOWSKISCHE Raum in verschiedene Gebiete zerlegt, die wir folgendermaßen zusammenstellen können:

- Das Innere des Vorkegels zusammen mit den Punkten der vorderen Kegelfläche selbst. Das ist die Gesamtheit der Punkte P_a , für die der Vektor $\vec{OP}_a$ nichtpositives Längenquadrat (d. h. $s^2(OP_a) \leq 0$) und positive Zeitkomponente hat.
- Das Innere des Nachkegels und die auf seiner Fläche liegenden Punkte: Die Gesamtheit der Punkte P_b , für die der Vektor $\vec{OP}_b$ ebenfalls nicht-positives Längenquadrat, aber negative Zeitkomponente hat.
- Der außerhalb des Lichtkegels liegende Teil des Raumes: Die Gesamtheit der Punkte P_c , für die der Vektor $\vec{OP}_c$ positives Längenquadrat hat.

Betrachten wir ein Teilchen, welches vom Punkt O ausgeht und sich beliebig bewegt, mit der einzigen Einschränkung, daß seine Geschwindigkeit $q \leq c$ ist, so liegt seine Weltlinie innerhalb des Raumteils a). Noch allgemeiner wird jede von O ausgelöste Wirkung, die ja nach dem Relativitätsprinzip höchstens mit Lichtgeschwindigkeit sich fortpflanzen kann, nur Punkte P_a des Bereichs a) erreichen können. Entsprechend ist die charakteristische Eigenschaft der Punkte P_b des Raumteils b), daß man aus ihnen Teilchen schleudern bzw. Wirkungen auslösen kann, welche den Punkt O

erreichen können. Dagegen besteht zwischen O und den Punkten P_c des Raumteiles c) kein solcher Zusammenhang: Keine von O ausgelöste Wirkung kann P_c erreichen und umgekehrt.

§ 9. Die allgemeine LORENTZ-Transformation

Die allgemeinste Transformation, welche die das Relativitätsprinzip ausdrückende Forderung (3, 4) bzw. (4, 1) befriedigt, nennen wir die allgemeine LORENTZ-Transformation. Im Gegensatz dazu bezeichnen wir (4, 12) als die spezielle LORENTZ-Transformation.

Der Übergang von (4, 12) zu der allgemeinen LORENTZ-Transformation läßt sich in zwei Schritte zerlegen. Zunächst betrachtet man eine beliebig orientierte relative Translationsgeschwindigkeit der zwei Koordinatensysteme, behält aber dabei die Parallelität der neuen Achsen $O'x', O'y', O'z'$ zu Ox, Oy, Oz bei; dann läßt man auch diese Parallelität der Achsen fallen. Am einfachsten führt man diese Verallgemeinerung auf Grund der *Gruppeneigenschaft* der LORENTZ-Transformation aus. Darunter verstehen wir im wesentlichen die Tatsache, daß, wenn $(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$ eine LORENTZ-Transformation und $(x', y', z', t') \rightarrow (x'', y'', z'', t'')$ ebenfalls eine LORENTZ-Transformation ist, dann auch die Transformation $(x, y, z, t) \rightarrow (x'', y'', z'', t'')$ eine LORENTZsche ist. Der Beweis folgt unmittelbar aus (4, 1). Daß nämlich $(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$ eine LORENTZ-Transformation ist, bedeutet einfach

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2.$$

Ähnlich gilt

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 = dx''^2 + dy''^2 + dz''^2 - c^2 dt''^2.$$

Daraus folgt

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx''^2 + dy''^2 + dz''^2 - c^2 dt''^2,$$

d. h. die zusammengesetzte Transformation $(x, y, z, t) \rightarrow (x'', y'', z'', t'')$ ist ebenfalls eine LORENTZ-Transformation.

Die Verallgemeinerung der LORENTZ-Transformation für eine beliebig orientierte Translationsgeschwindigkeit läßt sich am einfachsten in der Weise durchführen, daß man die zu (4, 12) analogen Formeln für eine der y - bzw. z -Achse parallele Translation hinschreibt und diese drei speziellen LORENTZ-Transformationen nacheinander ausführt.

Die zweite Verallgemeinerung für beliebig orientierte Achsen läßt sich auf Grund der Bemerkung durchführen, daß die Drehungen des gewöhnlichen 3-dimensionalen Raumes, bei unverändert gehaltener Zeit, ebenfalls zu der allgemeinen LORENTZ-Transformation gehören. Es genügt dann also, zu den speziellen LORENTZ-Transformationen solche Drehungen hinzuzufügen, um die Parallelität der Achsen aufzuheben.

Im übrigen werden wir uns für die genaue formelmäßige Darstellung der allgemeinen LORENTZ-Transformation nicht interessieren, sondern nur die

Tatsache berücksichtigen, daß es sich nach (4, 9) um eine lineare Transformation handelt. Führen wir also die schon in § 4 erwähnte, in der Darstellung der 4-dimensionalen Geometrie übliche Bezeichnung (4, 2) ein,

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad ct = x_4,$$

so wird diese Transformation von der Form sein:

$$x'_\varrho = \sum_{\mu=1}^4 \alpha_{\varrho\mu} x_\mu \quad (\varrho = 1, 2, 3, 4), \quad (9, 1)$$

wobei die Elemente der Transformationsmatrix $\alpha_{\varrho\mu}$ Konstante sind¹⁾. Setzt man (9, 1) in (3, 3) ein,

$$\sum_{\mu, \nu=1}^4 \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_{i\mu} x_\mu \alpha_{i\nu} x_\nu - \alpha_{4\mu} x_\mu \alpha_{4\nu} x_\nu \right) = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2,$$

und vergleicht man dann die an beiden Seiten auftretenden Koeffizienten von $x_\mu x_\nu$, so ergeben sich für $\alpha_{\varrho\mu}$ die zehn Bedingungen

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_{i\mu} \alpha_{i\nu} - \alpha_{4\mu} \alpha_{4\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad (9, 2)$$

wobei $\eta_{\mu\nu}$ die Bedeutung (4, 5) hat.

Für die spezielle LORENTZ-Transformation (4, 12) lautet die in (9, 1) auftretende Matrix $\alpha_{\varrho\mu}$:

$$\alpha_{\varrho\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}.$$

Weil $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1$ und

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 - \left(\frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 = 1$$

¹⁾ Noch allgemeiner hätte man zu schreiben

$$x'_\varrho = \sum_{\mu=1}^4 \alpha_{\varrho\mu} x_\mu + \beta_\varrho,$$

wobei die Konstanten β_ϱ eine willkürliche Wahl des Anfangspunktes des zweiten Koordinatensystems beschreiben. Für die physikalischen Anwendungen der speziellen Relativitätstheorie sind aber die Konstanten β_ϱ ohne Bedeutung.

ist, kann man setzen

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \text{Cof } \gamma, \quad \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \text{Sin } \gamma.$$

Die erste und vierte der Gleichungen (4, 12) nehmen dann die Form

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \text{Cof } \gamma + x_4 \text{Sin } \gamma, \\ x'_4 &= x_1 \text{Sin } \gamma + x_4 \text{Cof } \gamma \end{aligned}$$

an. Diese Formeln sind sehr ähnlich denjenigen, welche die gewöhnliche Drehung eines 2-dimensionalen kartesischen Koordinatensystems beschreiben. Daß hier die hyperbolischen statt der gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen auftreten, hat seinen Grund darin, daß in (3, 3),

$$\sum_{i=1}^3 x_i'^2 - x_4'^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 - x_4^2,$$

das Quadrat der vierten Koordinate mit dem negativen Vorzeichen eingeht.

Statt der in (4, 2) definierten reellen Koordinate $x_4 = ct$ kann man die rein imaginäre Koordinate

$$x_0 = i ct \quad (9, 3)$$

eingeführen. Dann nimmt (3, 3) die Gestalt

$$\sum_{e=0}^3 x_e'^2 = \sum_{e=0}^3 x_e^2 \quad (9, 4)$$

an, d. h. genau diejenige Form, welche die verallgemeinerten Drehungen der kartesischen Koordinatensysteme in einem 4-dimensionalen euklidischen Raum definiert. Die allgemeine LORENTZ-Transformation lautet jetzt

$$x'_e = \sum_{\mu=0}^3 \alpha_{e\mu} x_\mu \quad (e = 0, 1, 2, 3). \quad (9, 5)$$

Führt man (9, 5) in (9, 4) ein, so ergeben sich für $\alpha_{e\mu}$ die Bedingungen

$$\sum_{e=0}^3 \alpha_{e\mu} \alpha_{ev} = \delta_{\mu\nu}, \quad (9, 6)$$

wobei $\delta_{\mu\nu}$ die übliche Bedeutung hat:

$$\delta_{\mu\nu} = 1 \text{ wenn } \mu = \nu, \quad \delta_{\mu\nu} = 0 \text{ wenn } \mu \neq \nu. \quad (9, 7)$$

Die Beziehungen (9, 6) sind von derselben Form wie diejenigen, welche die Drehungen eines euklidischen Raumes definieren. Mit Hilfe von (9, 6) läßt

sich (9, 5) unmittelbar nach x_μ auflösen. Multiplizieren wir nämlich (9, 5) mit $a_{\nu\rho}$, so folgt nach Summation über ρ :

$$\sum_{\rho=0}^3 a_{\nu\rho} x'_\rho = \sum_{\mu=0}^3 \left(\sum_{\rho=0}^3 a_{\nu\rho} a_{\rho\mu} \right) x_\mu = \sum_{\mu=0}^3 \delta_{\nu\mu} x_\mu.$$

Die letzte Summe ist aber nichts anderes als x_ν , so daß gilt:

$$x_\nu = \sum_{\rho=0}^3 a_{\nu\rho} x'_\rho. \quad (9, 8)$$

Wenn man (9, 8) in (9, 4) einführt, erhält man die mit (9, 6) gleichwertigen Bedingungen

$$\sum_{\rho=0}^3 a_{\mu\rho} a_{\nu\rho} = \delta_{\mu\nu}. \quad (9, 9)$$

Wir geben noch die der Formel (9, 5) entsprechende Matrix $a_{\rho\mu}$ für die spezielle LORENTZ-Transformation (4, 12) an. Schreiben wir die erste und vierte der Gleichungen (4, 12) in der Form

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (x + i\beta ict), \quad ict' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (ict - i\beta x),$$

so folgt unmittelbar

$$a_{\rho\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}. \quad (9, 10)$$

Dabei haben wir den Indizes ρ und μ der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 und 0 gegeben, um einen leichten Vergleich mit den früheren, bei Verwendung der reellen Koordinate x_4 gewonnenen Formeln zu ermöglichen. Auch hier läßt sich formale Übereinstimmung mit den Formeln der Drehung eines 2-dimensionalen kartesischen Koordinatensystems erreichen. Es genügt dafür, einen rein imaginären Winkel φ einzuführen, so daß

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

In der Tat wird dann aus der ersten und vierten der Gleichungen (4, 12)

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \varphi + x_0 \sin \varphi, \\ x'_0 &= -x_1 \sin \varphi + x_0 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Es sei aber nochmals betont, daß die durch Verwendung der Koordinate x_0 erreichte Zurückführung des MINKOWSKISCHEN auf einen euklidischen Raum rein formal ist. Der euklidische Raum ist nämlich reell. Hier aber sind nur die Koordinaten x_1, x_2 und x_3 reell, während x_0 rein imaginär ist. Dementsprechend werden auch die Elemente $\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{03}$ sowie $\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30}$ der Transformationsmatrix rein imaginär. Trotzdem macht man in der speziellen Relativitätstheorie oft von der Koordinate x_0 Gebrauch, weil dies gewisse Vereinfachungen der Rechnungen ergibt.

§ 10. Vierdimensionale Vektoren. Der Geschwindigkeitsvektor

Wie im gewöhnlichen 3-dimensionalen, so geht auch im MINKOWSKISCHEN Raum der verallgemeinerte Vektorbegriff aus einer (endlichen oder unendlich kleinen) Verschiebung hervor. Die mathematische Definition ist folgende: Ein Vektor ist eine 4-komponentige Größe — d. h. eine Größe, die sich durch die Angabe von vier Komponenten bestimmen läßt —; bei Koordinatentransformationen ändern sich diese Komponenten nach derjenigen Formel, die für die Transformation der Komponenten einer Verschiebung gilt. Letztere Formel ergibt sich unmittelbar durch Differentiation von (9, 5):

$$dx'_e = \sum_{\mu=0}^3 \alpha_{e\mu} dx_\mu. \quad (10, 1)$$

Wenn wir also die Komponenten eines beliebigen Vektors im ungestrichenen Koordinatensystem mit A_μ bezeichnen, so müssen seine Komponenten im gestrichenen Koordinatensystem durch

$$A_e = \sum_{\mu=0}^3 \alpha_{e\mu} A_\mu \quad (10, 2)$$

gegeben sein.

Im nächsten Kapitel werden wir bei der Entwicklung der relativistischen Dynamik einige physikalisch wichtige Vektoren kennenlernen. Später werden wir den noch allgemeineren Begriff des Tensors definieren müssen. Hier wollen wir nur denjenigen 4-dimensionalen Vektor definieren, welcher die Grundlage der relativistischen Kinematik bildet: den 4-dimensionalen Geschwindigkeitsvektor eines bewegten Teilchens. Mathematisch zeichnet sich dieser Vektor dadurch aus, daß er durch die einfachste Operation, d. h. Division einer Verschiebung durch eine skalare Größe, entsteht. Dabei bedeutet eine skalare Größe, ähnlich wie in der 3-dimensionalen Geometrie, eine (einkomponentige) Größe, die sich bei Koordinatentransformationen nicht ändert.

In der NEWTONSchen Mechanik definieren wir den 3-dimensionalen Geschwindigkeitsvektor, indem wir die Verschiebung (dx, dy, dz) des Teilchens während des Zeitintervalls dt durch dt dividieren:

$$\mathbf{q} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right).$$

Diese Definition ist deshalb gerechtfertigt, weil in der NEWTONSchen Mechanik die Zeit t und deshalb auch dt bei Koordinatentransformationen invariant bleibt.

Im MINKOWSKISchen Raum müssen wir zunächst eine 4-dimensionale Verschiebung zugrunde legen, d. h. ein Element der die Bewegung des Teilchens beschreibenden Weltlinie:

$$dx_e = (dx, dy, dz, ic dt). \quad (10, 3)$$

Ferner ist zu beachten, daß jetzt dt keine Invariante ist, die vier Ableitungen $\frac{dx_e}{dt}$ also keinen Vektor bilden. Die einzige Invariante, die sich an Stelle von dt verwenden läßt, ist die durch (8, 3) definierte 4-dimensionale Länge ds der Verschiebung dx_e . Nun interessieren wir uns aber vor allem für die physikalisch möglichen Bewegungen von gewöhnlichen materiellen Teilchen, d. h. für Bewegungen mit Unterlichtgeschwindigkeit; und gerade bei solchen Bewegungen ist $ds^2 < 0$, also ds rein imaginär. Dazu kommt noch der Umstand, daß ds die Dimension von $c dt$ hat. Am zweckmäßigsten werden wir also zur Bildung des Geschwindigkeitsvektors nicht ds selbst, sondern $\frac{ds}{ic}$, d. h. nach (8, 8) das Eigenzeitelement $d\tau$ des bewegten Teilchens verwenden. Wir definieren also die 4-dimensionale Geschwindigkeit u_e des Teilchens durch

$$u_e = \frac{dx_e}{d\tau} = ic \frac{dx_e}{ds}. \quad (10, 4)$$

Es sei noch bemerkt, daß die Wahl von $d\tau$ auch in einer anderen Hinsicht zweckmäßig ist. Es folgt nämlich aus (8, 6) und (8, 8)

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}. \quad (10, 5)$$

Daher gilt

$$d\tau \rightarrow dt \quad \text{für} \quad \frac{q}{c} \rightarrow 0.$$

Wie wir im nächsten Kapitel ausführlich beweisen werden, geht die relativistische Mechanik im Falle $\frac{q}{c} \ll 1$ in die NEWTONSche Mechanik über. Es ist deshalb befriedigend, daß in diesem Fall die relativistische Invariante $d\tau$ in die für die NEWTONSche Mechanik invariante Größe dt übergeht.

Ausführlich geschrieben lautet die Formel (10, 4) nach (10, 5)

$$u_e = \left(\frac{q_x}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \frac{q_y}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \frac{q_z}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \right). \quad (10, 6)$$

Es ergibt sich daraus die Identität

$$\sum_{e=0}^3 u_e^2 = -c^2. \quad (10, 7)$$

Von den vier Komponenten u_e der 4-dimensionalen Geschwindigkeit sind also nur drei voneinander unabhängig. Die linke Seite von (10, 7) stellt das der Definition (8, 2) entsprechende Quadrat der Länge des Vektors u_e dar. Daß diese Größe negativ ausfällt, hängt offenbar mit der aus (8, 6) folgenden Bemerkung zusammen, wonach jedes Element der (4-dimensionalen) Bahn eines mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegten Teilchens eine zeitartige Verschiebung ist. Es sei bei dieser Gelegenheit noch bemerkt, daß die Gleichungen (10, 4) bzw. (10, 6) nur für Bewegungen mit Unterlichtgeschwindigkeit sinnvoll bleiben, da für $q = c$ die Komponenten u_e unendlich groß werden. Für den Spezialfall $q = c$ (Bewegung von Photonen) ist also die Definition (10, 4) unbrauchbar.

Wir geben noch für spätere Anwendungen die angenäherte Form von u_e für den Fall langsamer Bewegungen, $\frac{q}{c} \ll 1$, an:

$$u_e \approx (q_x, q_y, q_z; ic). \quad (10, 8)$$

Kapitel II

DYNAMIK DES MASSEN-PUNKTES

§ 11. Der 4-dimensionale Impulsvektor

In diesem zweiten Kapitel wollen wir die relativistische Dynamik des Massenpunktes entwickeln. Dabei werden wir von der historischen Entwicklung ganz absehen müssen, da dieser Weg zwar besonders lehrreich, dafür aber auch langwierig und mühsam ist. Unser Ziel dagegen ist, die relativistische Dynamik, deren Entwicklung schon vor längerer Zeit völlig abgeschlossen wurde, in möglichst kompakter und übersichtlicher Weise darzustellen. Dieses Ziel wird am besten durch eine passend gewählte synthetische Darstellung erreicht.

Zu einer besonders klaren und gleichzeitig auch sehr allgemeinen Formulierung gelangt man, wenn man sich von den Erhaltungssätzen der Mechanik führen läßt. Einen solchen Weg wollen wir hier einschlagen. Deshalb müssen wir mit einer kurzen Zusammenstellung der Erhaltungssätze der NEWTONschen Mechanik beginnen.

In der NEWTONschen Mechanik gibt es im wesentlichen drei fundamentale Erhaltungssätze. Es sind dies die Sätze von der Erhaltung der Masse, des Impulses und der Energie. Der erste Satz bezieht sich auf jeden einzelnen Körper und besagt, daß, solange dieser Körper als Ganzes erhalten wird, seine Masse unverändert bleibt. Eine für die folgenden Überlegungen besonders wichtige Tatsache haben wir schon in § 1 erwähnt: Bei dem durch die GALILEI-Transformation (1, 2) beschriebenen Übergang von einem Inertialsystem (x, y, z) zu einem anderen (x', y', z') bleibt der Wert der Masse unverändert. Es gilt also, wenn wir mit m bzw. m' den Wert der Masse im Koordinatensystem (x, y, z) bzw. (x', y', z') bezeichnen,

$$m = m'. \quad (11, 1)$$

Die Sätze von der Erhaltung von Impuls und Energie gelten nicht mehr getrennt für jeden einzelnen Körper, sondern nur für isolierte Systeme von materiellen Körpern: Die Summen der Impulse und der Energien aller Körper des isolierten Systems, wenn man alle an einem und demselben Zeitpunkt t nimmt, sind unabhängig von der Zeit t . Ein weiterer Unterschied zum Erhaltungssatz für die Masse besteht darin, daß sich beim Übergang von einem Inertialsystem (x, y, z) zu einem anderen (x', y', z') die Werte des Gesamtimpulses und der Gesamtenergie eines gegebenen Systems ändern.

Es ist leicht zu finden, wie sich der Impuls eines Körpers bei der durch die GALILEI-Transformation (1, 2) beschriebenen Änderung des Koordinaten-

systems verändert. Die Geschwindigkeitskomponenten des Körpers in den Koordinatensystemen (x, y, z) und (x', y', z') sind durch (I, 4) verbunden:

$$q'_x = q_x - v, \quad q'_y = q_y, \quad q'_z = q_z.$$

Beachtet man ferner, daß der Impuls des Körpers durch

$$\mathbf{p} = m \mathbf{q} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{p}' = m' \mathbf{q}' \quad (II, 2)$$

gegeben ist — wobei nach (II, 1) $m' = m$ gilt —, so folgt unmittelbar

$$p'_x = p_x - m v, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z. \quad (II, 3)$$

Diese Beziehung stellt die Transformationsformel für den Impuls in der NEWTONschen Mechanik dar.

Stellt man nun die Gleichungen (II, 3), (II, 1) zusammen, so erhält man das Gleichungssystem

$$p'_x = p_x - m v, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z; \quad m' = m, \quad (II, 4)$$

welches eine vollständige Analogie zur GALILEI-Transformation (I, 2), (I, 3),

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z; \quad t' = t, \quad (II, 5)$$

aufweist. Dabei treten die Impulskomponenten p_x, p_y, p_z an die Stelle der Koordinaten x, y, z und die Masse m an die Stelle der Zeit t . Durch diese Analogie wird die Annahme nahegelegt, daß beim Übergang von der NEWTONschen zur relativistischen Mechanik die Beziehung (II, 4), ähnlich wie (II, 5), ungültig wird und durch eine der LORENTZ-Transformation (4, 12) analoge Beziehung zu ersetzen ist. Wir führen also folgendes Postulat ein: In der relativistischen Mechanik stellen die vier Größen p_x, p_y, p_z und mc die Komponenten eines 4-dimensionalen Vektors p_α des MINKOWSKISchen Raumes dar. Die ausführliche Zuordnung lautet

$$p_1 = p_x, \quad p_2 = p_y, \quad p_3 = p_z; \quad p_4 = mc. \quad (II, 6)$$

Wie wir in den folgenden Abschnitten zeigen werden, ist durch dieses Postulat der Übergang von der NEWTONschen zur relativistischen Dynamik in allen wesentlichen Zügen eindeutig festgelegt. Den Vektor p_α dürfen wir als den 4-dimensionalen Impuls des betreffenden Körpers bezeichnen. Er wird auch der Energie-Impulsvektor des Körpers genannt, weil, wie in § 14 gezeigt wird, die Komponente p_4 bis auf einen konstanten Faktor mit der Gesamtenergie des Körpers identisch ist. Statt der reellen Komponente $p_4 = mc$ verwendet man oft die rein imaginäre Größe

$$p_0 = imc, \quad (II, 7)$$

die der durch (9, 3) eingeführten rein imaginären Koordinate $x_0 = ict$ entspricht.

Allein die Forderung, daß p_a ein Vierervektor ist, genügt natürlich nicht, um die genaue Struktur dieses Vektors zu bestimmen. Dies wird erst mit Hilfe einer weiteren, rein physikalischen Forderung erreicht. Erinnern wir uns nämlich, daß Abweichungen von der NEWTONschen Mechanik erst bei Bewegungen mit Geschwindigkeiten von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit beobachtet wurden, so müssen wir noch fordern, daß bei Bewegungen mit $q \ll c$ alle Formeln der relativistischen Dynamik in die entsprechenden Formeln der NEWTONschen Mechanik übergehen. Beachtet man also, daß in der NEWTONschen Mechanik nach (11, 2) Impuls und Geschwindigkeit einander parallel sind, so muß auch p_a der durch (10, 4) definierten 4-dimensionalen Geschwindigkeit u_a des Körpers proportional sein. Es wird also

$$p_a = m_0 u_a, \quad (11, 8)$$

wobei m_0 ein den Körper charakterisierender Proportionalitätsfaktor ist. Es sei noch bemerkt, daß m_0 eine skalare Größe sein muß, da in (11, 8) beide Größen p_a und u_a (4-dimensionale) Vektoren sind.

Führen wir in (11, 8) die durch (10, 6) gegebenen Werte der Geschwindigkeitskomponenten u_a ein, so folgt (mit $q_x = q_1$, $q_y = q_2$, $q_z = q_3$)

$$p_i = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} q_i \quad \left(i = 1, 2, 3; \beta = \frac{q}{c} \right), \quad (11, 9)$$

$$p_4 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} c. \quad (11, 10)$$

Gleichung (11, 9) zeigt, daß, wie in der NEWTONschen Mechanik, so auch hier der gewöhnliche (3-dimensionale) Impuls des Körpers seiner (3-dimensionalen) Geschwindigkeit proportional ist. Den Proportionalitätsfaktor

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (11, 11)$$

werden wir als die Inertialmasse oder einfach als die Masse des Körpers bezeichnen. Gleichungen (11, 9), (11, 10) lassen sich dann auch so schreiben:

$$p_i = m q_i, \quad p_4 = m c. \quad (11, 12)$$

Betrachten wir die Bewegung eines Körpers von verschiedenen Inertialsystemen aus, so wird in diesen Koordinatensystemen die Geschwindigkeit q des Körpers verschiedene Werte annehmen. Da nach (11, 8) m_0 eine skalare Größe ist, d. h. in allen Koordinatensystemen denselben Wert hat, folgt, daß die Masse m des Körpers in verschiedenen Koordinatensystemen verschiedene Werte haben wird. Betrachten wir insbesondere dasjenige Inertialsystem, in welchem $q=0$ ist, so wird in ihm nach (11, 11) $m=m_0$. Danach stellt m_0 den Wert der Masse in demjenigen Koordinatensystem dar, in

welchem der Körper ruht. Dementsprechend bezeichnet man m_0 als die *Ruhmasse* des Körpers.

Physikalisch interessanter ist die Frage, ob bei Zugrundelegung eines gegebenen Koordinatensystems ein sich mit veränderlicher Geschwindigkeit bewegendes Körper ebenfalls eine veränderliche Masse m , entsprechend einer konstanten Ruhmasse m_0 , besitzt. Diese Frage ist zu bejahen, solange der Körper unverändert bleibt, da nach (II, 8) m_0 eine den Körper charakterisierende Größe sein muß. Nur in besonderen Fällen, bei welchen eine Änderung des inneren Zustandes des Körpers auftritt, kann sich m_0 ändern. Genauer werden wir das Verhalten von m_0 wie auch seine physikalische Bedeutung durch die Ausführungen der folgenden Abschnitte und die darin diskutierten konkreten Beispiele kennenlernen.

§ 12. Der relativistische Erhaltungssatz

Wir betrachten zunächst ein einziges, mit keinen weiteren Körpern wechselwirkendes Teilchen. Die Erhaltung des Impulses wird unter Beachtung von (II, 9) durch die Beziehung

$$p_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (12, 1)$$

ausgedrückt. Es wäre naheliegend, auch die Konstanz der Komponente p_4 zu fordern, da ja alle vier Größen p_α als Komponenten eines Vektors eng miteinander zusammenhängen. Dabei könnte man sich aber etwas unsicher fühlen, da p_4 proportional der Masse m ist, welche nach den Ausführungen am Ende des § 11 keineswegs allgemein konstant bleibt. Man hilft sich nun mit der Bemerkung, daß sich das isolierte Teilchen notwendig mit konstanter Geschwindigkeit bewegen muß. Es folgt dann aus (10, 6), daß auch die 4-dimensionale Geschwindigkeit u_α konstant ist, so daß aus (12, 1) auch $m_0 = \text{const}$ folgt. Schließlich wird also auch

$$p_4 = \text{const}.$$

Umgekehrt ist die Konstanz aller vier Komponenten p_α erforderlich, um daraus auf die gleichförmige Bewegung des isolierten Teilchens schließen zu können. Dementsprechend entscheiden wir uns, als Erhaltungssatz der relativistischen Dynamik für den Fall eines isolierten Teilchens die Beziehung

$$p_\alpha = \text{const} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \quad (12, 2)$$

einzuführen. Die physikalische Bedeutung der letzten Komponente dieser Gleichung, $p_4 = \text{const}$, ist vorläufig noch unklar. Sie wird sich erst aus der Diskussion des § 14 ergeben.

Wir gehen nun zum Fall mehrerer, miteinander wechselwirkender Teilchen über. Wenn es sich dabei um eine Wechselwirkung handelt, die sich auch bei endlicher Entfernung der betreffenden Teilchen bemerkbar macht, dann wird man zu ihrer vollen Beschreibung den Begriff des Kraftfeldes benötigen. Wie wir aber aus der ausführlichen Diskussion des elektromagnetischen Feldes

gelernt haben, ist in einem solchen Falle auch eine zu dem Kraftfeld gehörende kontinuierliche Verteilung von Impuls und Energie im Raum vorhanden. Bei Wechselwirkung auf endliche Entfernungen wird man also im wesentlichen mit einem Kontinuum zu tun haben. Die Mechanik des Kontinuums werden wir aber erst im Kapitel IV behandeln. Hier interessieren wir uns lediglich für die relativistische Dynamik der Massenpunkte. Daher müssen wir die einschränkende Annahme einführen, daß die Wechselwirkung nur bei äußerst kleinen Entfernungen der Teilchen auftritt, daß mit anderen Worten die Teilchen nur durch Stoßprozesse miteinander wechselwirken.

Der relativistische Erhaltungssatz für ein System von Teilchen, welche nur untereinander, aber sonst mit keinen weiteren Körpern wechselwirken, wird durch die unmittelbare Verallgemeinerung von (12, 2) gegeben:

$$\sum p_\alpha = \text{const} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4). \quad (12, 3)$$

Dabei ist die Summation über alle Teilchen des Systems auszuführen, und zwar in der Weise, daß man für jedes Teilchen den Wert von p_α zu ein und demselben Zeitpunkt t nimmt. Da wir angenommen haben, daß die Teilchen nur durch Stöße untereinander wechselwirken, folgt, daß sich jedes Teilchen im ganzen durch zwei aufeinanderfolgende Stöße begrenzten Zeitintervall frei bewegt. In diesem ganzen Intervall bleibt also nach (12, 2) der 4-dimensionale Impuls p_α des Teilchens konstant. Änderungen der individuellen Werte von p_α treten nur bei den Stoßprozessen auf. Daher kann man den allgemeinen Erhaltungssatz (12, 3) nicht nur auf das System als Ganzes anwenden, sondern auch getrennt auf diejenigen Teilchen, die an einem bestimmten Stoßprozeß teilnehmen.

Bezeichnet man z. B. mit p_α und p'_α die Werte des 4-dimensionalen Impulses der zwei an einem Stoß beteiligten Teilchen, so besagt Gleichung (12, 3), daß die Summe $p_\alpha + p'_\alpha$ vor und nach dem Stoß denselben Wert hat. Für $\alpha = 1, 2, 3$ drückt dies die Erhaltung des Impulses in der uns aus der NEWTONSchen Mechanik her bekannten Form aus. Für $\alpha = 4$ dagegen ergibt sich aus (12, 3)

$$p_4 + p'_4 = \text{const}, \quad (12, 4)$$

oder unter Beachtung von (11, 12)

$$m + m' = \text{const}. \quad (12, 5)$$

Die einzelnen Werte m und m' , deren Summe nach (12, 5) konstant bleibt, ändern sich im allgemeinen bei jedem Stoßprozeß, wie man es z. B. bei den in § 17 durchgerechneten Stoßproblemen sehen kann. Daraus folgt, daß die vierte Komponente des Erhaltungssatzes (12, 3),

$$\sum p_4 = \text{const}, \quad (12, 6)$$

überhaupt keine Beziehung zur NEWTONSchen Erhaltung der Masse hat. Wie wir in § 14 sehen werden, drückt die Gleichung (12, 6) in Wirklichkeit den Energiesatz aus.

Auch die Konstanz der Ruhmasse eines Teilchens, die wir bei einem isolierten Teilchen aus dem Erhaltungssatz (12, 2) unmittelbar ableiten konnten, stellt im Falle mehrerer Teilchen keine notwendige Folge des allgemeinen Erhaltungssatzes (12, 3) dar. Die Richtigkeit dieser Behauptung läßt sich am einfachsten durch die Anwendung des Satzes (12, 6) auf ein spezielles Beispiel beweisen. Wir betrachten den Stoß von zwei gleichgroßen Körpern, die sich vor dem Stoß mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten q und $-q$ bewegen. Ferner sei der Stoß völlig unelastisch, so daß nach dem Stoß beide Körper die Geschwindigkeit Null haben werden. Wir bezeichnen den Wert der Ruhmasse jedes einzelnen Körpers vor dem Stoß mit m_0 , nach dem Stoß dagegen mit m_0^* . Es folgt dann aus dem Erhaltungssatz (12, 6), unter Beachtung von (11, 10) und der Tatsache, daß $q^* = 0$ ist:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0^* \quad \left(\beta = \frac{q}{c} \right). \quad (12, 7)$$

Durch den unelastischen Stoß wurde also die Ruhmasse vergrößert. Wie wir in § 15 zeigen werden, tritt eine Änderung der Ruhmasse bei allen Prozessen auf, bei denen kinetische Energie erzeugt bzw. verbraucht wird, d. h. bei denjenigen Prozessen, welche nicht rein mechanisch sind. Dagegen bleiben bei allen rein mechanischen Prozessen die Ruhmassen der beteiligten Teilchen unverändert. Insbesondere gilt dies für den völlig elastischen Stoßprozeß.

§ 13. Die dynamische Grundgleichung

Interessiert man sich für die ausführliche Beschreibung der Bewegung eines Teilchens, so kann man dies in der NEWTONSchen Mechanik mit Hilfe der dynamischen Grundgleichung erreichen. Diese lautet, wenn wir in üblicher Weise die Vektoren des gewöhnlichen (3-dimensionalen) Raumes mit Frakturbuchstaben bezeichnen:

$$\mathfrak{F} = m \frac{d\mathfrak{q}}{dt}. \quad (13, 1)$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{F}$ die auf das betreffende Teilchen von allen mit ihm wechselwirkenden Körpern ausgeübte Gesamtkraft. Handelt es sich z. B. um eine Stoßwechselwirkung, so ist $\mathfrak{F}$ die bei den aufeinanderfolgenden Stoßvorgängen auf das betreffende Teilchen ausgeübte Kraft. Übrigens kann man die dynamische Grundgleichung (13, 1) auch für den Fall der Bewegung des Teilchens in einem Kraftfeld, z. B. in einem elektromagnetischen Feld, verwenden, unter der Voraussetzung, daß man dieses Feld durch eine vorherige Rechnung — welche offenbar im Rahmen der entsprechenden Feldtheorie auszuführen ist — schon bestimmt hat, so daß bei der Verwendung von (13, 1)

die Kraft $\mathfrak{F}$ als vorgegeben zu betrachten ist. Unsere Aufgabe besteht nun darin, durch passende Verallgemeinerung von (13, 1) die Grundgleichung der relativistischen Dynamik aufzustellen.

In der Newtonschen Mechanik kann man wegen (11, 2),

$$\mathbf{p} = m\mathbf{q},$$

die dynamische Grundgleichung (13, 1) auch in der Form

$$\mathfrak{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (13, 2)$$

schreiben, da die Masse m als eine konstante Größe angenommen wurde. In der speziellen Relativitätstheorie dagegen sind die beiden Gleichungen (13, 1) und (13, 2) nicht mehr miteinander gleichwertig. Es gibt nun ein wichtiges Argument, welches dafür spricht, der Beziehung (13, 2) den Vorzug zu geben und sie als die Grundgleichung der relativistischen Dynamik zu wählen. Betrachten wir einen Stoß zwischen zwei Teilchen und schreiben wir die Beziehung (13, 2) für jedes Teilchen:

$$\mathfrak{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathfrak{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt}; \quad (13, 3)$$

$\mathbf{p}$ bzw. $\mathbf{p}'$ ist dabei der Impuls des ersten bzw. des zweiten Teilchens, $\mathfrak{F}$ die vom zweiten Teilchen auf das erste und $\mathfrak{F}'$ die vom ersten Teilchen auf das zweite ausgeübte Kraft. Berücksichtigen wir noch den Satz von der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung,

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}' = 0, \quad (13, 4)$$

so folgt daraus

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} + \mathbf{p}') = 0, \quad (13, 5)$$

d. h. der Satz von der Erhaltung des Impulses

$$\mathbf{p} + \mathbf{p}' = \text{const.}$$

Hätten wir dagegen die Beziehung (13, 1) zugrunde gelegt, so könnten wir diese Schlußfolgerung nur im Falle konstanter Masse aufrechterhalten. Da nun in der speziellen Relativitätstheorie die Masse im allgemeinen veränderlich ist, so hätten wir bei Zugrundelegung von (13, 1) entweder auf den Impulssatz oder auf die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung verzichten müssen. Wir entschließen uns daher, um auch das Gesetz von der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung in die spezielle Relativitätstheorie übertragen zu können, für die Wahl von (13, 2) als Grundgleichung der relativistischen Dynamik.

Führen wir in (13, 2) die nach (11, 12) auch in der speziellen Relativitätstheorie gültige Beziehung

$$\mathbf{p} = m\mathbf{q}$$

ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{F} = m \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{q}. \quad (13, 6)$$

Man ersieht daraus, daß die Kraft nicht mehr allgemein proportional der Beschleunigung und sogar nicht mehr zu ihr parallel zu sein braucht. Nur bei denjenigen speziellen Bewegungen, bei welchen

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (13, 7)$$

ist, wird die Kraft, ähnlich wie in der NEWTONSchen Mechanik, der Beschleunigung proportional. Die physikalische Bedeutung von (13, 7) läßt sich für den besonders wichtigen Fall eines Teilchens mit konstanter Ruhmasse unmittelbar angeben. Nach (11, 11) ist nämlich im Falle $m_0 = \text{const}$ die Bedingung (13, 7) mit

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad (13, 8)$$

gleichwertig: Nun ist aber (13, 8) mit

$$\left(\mathbf{q} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) = 0$$

gleichbedeutend. Daraus folgt, da wegen (13, 7) jetzt $\mathfrak{F} = m \frac{d\mathbf{q}}{dt}$ ist, daß

$$(\mathfrak{F} \mathbf{q}) = 0. \quad (13, 9)$$

Der Fall (13, 7) liegt also dann vor, wenn die Kraft auf der Geschwindigkeit dauernd senkrecht steht, wie z. B. bei der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem magnetostatischen Feld.

Für eine allgemeinere Diskussion von (13, 6) ist es zweckmäßig, die Kraft $\mathfrak{F}$ und die Beschleunigung $\frac{d\mathbf{q}}{dt}$ in Komponenten senkrecht und parallel zu $\mathbf{q}$ zu zerlegen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{F}_\perp + \mathfrak{F}_\parallel, \\ \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)_\perp + \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)_\parallel. \end{aligned} \right\} \quad (13, 10)$$

Es folgt dann aus (13, 6)

$$\mathfrak{F}_\perp = m \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)_\perp, \quad (13, 11)$$

$$\mathfrak{F}_\parallel = m \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)_\parallel + \frac{dm}{dt} \mathbf{q}. \quad (13, 12)$$

Die letzte Gleichung kann man in eine einfachere Form bringen. Setzt man nämlich

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_{\parallel} = \alpha q$$

und multipliziert die zweite Gleichung in (13, 10) skalar mit q , so folgt

$$\left(q \frac{dq}{dt}\right) = q \frac{dq}{dt} = \alpha q^2.$$

Es ist also

$$\alpha = \frac{1}{q} \frac{dq}{dt}.$$

Damit nimmt (13, 12) die Form an

$$\mathfrak{F}_{\parallel} = \left(m + \frac{dm}{dt} q \frac{dt}{dq}\right) \left(\frac{dq}{dt}\right)_{\parallel}. \quad (13, 13)$$

Wir wollen noch den in der Klammer der rechten Seite von (13, 13) stehenden Ausdruck für den physikalisch besonders wichtigen Fall eines Teilchens mit konstanter Ruhmasse ausrechnen. Da in diesem Fall die Masse m nur durch die Größe q von der Zeit t abhängt, ist

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dq} \cdot \frac{dq}{dt}.$$

Gleichung (13, 13) wird also zu

$$\mathfrak{F}_{\parallel} = \left(m + q \frac{dm}{dq}\right) \left(\frac{dq}{dt}\right)_{\parallel}.$$

Man findet nun aus (11, 11)

$$\frac{dm}{dq} = \frac{mq}{c^2 - q^2},$$

so daß schließlich

$$\mathfrak{F}_{\parallel} = \frac{m}{1 - \frac{q^2}{c^2}} \left(\frac{dq}{dt}\right)_{\parallel}. \quad (13, 14)$$

Die Verhältnisse der zueinander entsprechenden Kraft- und Beschleunigungskomponenten,

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F}_{\perp} : \left(\frac{dq}{dt}\right)_{\perp} &= m, \\ \mathfrak{F}_{\parallel} : \left(\frac{dq}{dt}\right)_{\parallel} &= \frac{m}{1 - \frac{q^2}{c^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (13, 15)$$

bezeichnet man oft, besonders in der älteren Literatur, als die transversale bzw. die longitudinale Masse des Teilchens.

Es sei an dieser Stelle noch bemerkt, daß die Grundgleichung der relativistischen Dynamik eine unmittelbare experimentelle Bestätigung erhalten hat. Dies hängt mit den Ablenkungsversuchen von Elektronen in elektrostatischen bzw. magnetostatischen Feldern zusammen. Bekanntlich hatte man diese Versuche zur Bestimmung der Masse von geladenen Teilchen angestellt. Die Ergebnisse hatten zunächst zu wohldefinierten Massen der Teilchen geführt. Als man aber später mit Elektronen größerer kinetischer Energie experimentierte, stellte sich eine Diskrepanz heraus, die mit wachsender Elektronenenergie immer größer wurde. Die gemessenen Ablenkungen waren nämlich kleiner als die aus dem NEWTONschen Grundgesetz (13, 1) berechneten, was eindeutig darauf hinwies, daß mit wachsender Energie der Elektronen ihre Masse wächst. Genauere Messungen haben dann zu einer quantitativen Bestätigung der Formel (11, 11) für die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit, bei konstant bleibender Ruhmasse m_0 , geführt. Die Konstanz der Ruhmasse entspricht übrigens durchaus unseren Erwartungen, da es ja ersichtlich keinen Grund für eine Änderung des inneren Zustandes der Elektronen bei den Ablenkungsversuchen gibt.

§ 14. Der Satz von der Trägheit der Energie

Wir betrachten ein Teilchen mit konstanter Ruhmasse m_0 , welches sich in einem gegebenen Kraftfeld bewegt. Ist q die Geschwindigkeit des Teilchens zum Zeitpunkt t , so wird seine Verrückung im Zeitelement dt

$$d\mathbf{r} = \mathbf{q} dt.$$

Die Arbeit der auf das Teilchen einwirkenden Kraft $\mathfrak{F}$ definieren wir durch die von der NEWTONschen Mechanik her bekannte Formel

$$dW = (\mathfrak{F} d\mathbf{r}) = (\mathfrak{F} \mathbf{q}) dt. \quad (14, 1)$$

Führen wir in diese Beziehung die dynamische Grundgleichung (13, 6) ein, so folgt

$$dW = m q dq + q^2 dm.$$

Berücksichtigen wir noch den Wert (11, 11) von m , so finden wir nach einer einfachen Zwischenrechnung:

$$dW = m_0 c^2 d \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \right).$$

Oder schließlich nach nochmaliger Verwendung von (11, 11):

$$dW = c^2 dm. \quad (14, 2)$$

Die Arbeit dW stellt den Zuwachs der kinetischen Energie des Teilchens im Zeitintervall dt dar:

$$dE_{\text{kin}} = dW = c^2 dm. \quad (14, 3)$$

Für ein endliches Zeitintervall erhalten wir die Änderung der kinetischen Energie durch Integration von (14, 3):

$$E_{\text{kin}}(t) - E_{\text{kin}}(t_0) = \int_{t_0}^t c^2 dm = c^2 [m(t) - m(t_0)]. \quad (14, 4)$$

Nehmen wir insbesondere an, daß am Zeitpunkt t_0 das Teilchen die Geschwindigkeit $q_0 = 0$ hat, dann dürfen wir setzen:

$$E_{\text{kin}}(t_0) = 0.$$

Beachten wir noch, daß dann nach (11, 11) auch

$$m(t_0) = m_0$$

ist, so erhalten wir die wichtige Formel:

$$E_{\text{kin}}(t) = c^2 [m(t) - m_0]. \quad (14, 5)$$

Es sei noch gezeigt, daß im Falle $q \ll c$ die Formel (14, 5) in die entsprechende Formel der Newtonschen Mechanik übergeht. Für $q \ll c$ dürfen wir die Entwicklung

$$\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{c^2} + \dots$$

näherungsweise mit dem zweiten Term abbrechen. Damit ergibt sich aber aus (14, 5) und (11, 11) der NEWTONSCHE Ausdruck für die kinetische Energie,

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 q^2. \quad (14, 5a)$$

Andererseits ist leicht einzusehen, daß auch in m_0 Beiträge enthalten sind, welche anderen Formen von Energie entsprechen. Man betrachte nämlich den am Ende des § 12 diskutierten unelastischen Stoß. Bei diesem Stoß hat sich die Ruhmasse jedes beteiligten Körpers um den Betrag

$$m'_0 - m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} - m_0 = m - m_0$$

geändert, wobei m die Masse des Körpers vor dem Stoß bedeutet. Es gilt also

$$(m'_0 - m_0)c^2 = (m - m_0)c^2. \quad (14, 6)$$

Nun ist die rechte Seite von (14, 6) nach (14, 5) nichts anderes als die kinetische Energie des Körpers vor dem Stoß, welche durch den Stoßprozeß in Wärme umgewandelt wurde. Danach besagt (14, 6), daß der Zuwachs $m'_0 - m_0$ der Ruhmasse, multipliziert mit c^2 , gleich der im Körper enthaltenen Wärmeenergie ist.

Durch diese Bemerkung werden wir auf eine in physikalischer Hinsicht besonders wichtige Frage geführt: Welcher Anteil der Ruhmasse wird anderen Formen von Energie entsprechen? Die Beantwortung dieser Frage verdanken wir EINSTEIN. Die Antwort lautet: *Die gesamte Ruhmasse m_0 .* Das Produkt $m_0 c^2$ gibt also die *innere* Energie des Teilchens an,

$$E_{\text{inn}} = m_0 c^2. \quad (14, 7)$$

Die *Gesamtenergie* des Teilchens wird dann durch die Summe der inneren und der kinetischen Energie gegeben,

$$E = E_{\text{inn}} + E_{\text{kin}}. \quad (14, 8)$$

Addieren wir Gleichungen (14, 5) und (14, 7), so ergibt sich

$$E = mc^2. \quad (14, 9)$$

Diese Gleichung drückt den berühmten EINSTEINSchen Satz von der *Trägheit der Energie* aus. Da im Falle $q=0$ die kinetische Energie des Teilchens verschwindet, kann man die innere Energie auch als die *Ruhenergie* des Teilchens bezeichnen,

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (14, 7a)$$

Durch die Aufstellung der Beziehung (14, 9) ist nun auch die in § 11 gestellte Frage nach der physikalischen Bedeutung der vierten Komponente des 4-dimensionalen Impulses p_a geklärt. Es folgt nämlich aus (11, 12) und (14, 9)

$$E = p_4 c; \quad (14, 10)$$

p_4 ist also bis auf den konstanten Faktor $\frac{1}{c}$ mit der Energie des Teilchens identisch. Dadurch ist auch die Bezeichnung von p_a als des Energie-Impulsvektors des Teilchens gerechtfertigt. Ferner ergibt sich aus (14, 10), daß die vierte Komponente des Erhaltungssatzes (12, 3),

$$\sum p_4 = \text{const},$$

mit dem Energiesatz identisch ist. In der speziellen Relativitätstheorie werden also die Erhaltungssätze von Impuls und Energie zu einem 4-dimensionalen Vektorsatz vereinigt. Es sei nochmals bemerkt, daß der NEWTONsche Erhaltungssatz für die Massen der einzelnen Körper in der Relativitätstheorie nicht gilt. Der Erhaltungssatz (12, 5) für die Gesamtmasse eines isolierten Systems ist wegen (14, 9) mit dem Energiesatz gleichbedeutend.

An dieser Stelle wollen wir einige Formeln zusammenstellen, welche für die Anwendungen besonders wichtig sind. Im Ruhssystem des Teilchens verschwindet mit seiner Geschwindigkeit $\mathbf{q}$ auch der gewöhnliche (3-dimensionale) Impuls $\mathbf{p}$. Daher ist der 4-dimensionale Impuls von der Form

$$p_\alpha = \left(0, 0, 0; m_0 c = \frac{E_0}{c} \right). \quad (14, 11)$$

In einem beliebigen Koordinatensystem, in dem das Teilchen die Geschwindigkeit $\mathbf{q}$ besitzt, ist nach (11, 12)

$$p_\alpha = (m q_x, m q_y, m q_z; m c).$$

Also nach (14, 9)

$$p_\alpha = \left(\frac{E}{c^2} q_x, \frac{E}{c^2} q_y, \frac{E}{c^2} q_z; \frac{E}{c} \right). \quad (14, 12)$$

Dabei sind E und E_0 durch die aus (11, 11) folgende Beziehung

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \quad (14, 13)$$

verbunden. Die Formeln (14, 12) und (14, 13) kann man übrigens aus (14, 11) unmittelbar ableiten, wenn man bedenkt, daß p_α ein Vektor des MINKOWSKISCHEN Raumes ist. Es genügt daher, die Transformationsformel (10, 2) zu verwenden, und zwar mit derjenigen Matrix $a_{\alpha\mu}$, welche die der relativen Translationsgeschwindigkeit $\mathbf{v} = -\mathbf{q}$ entsprechende LORENTZ-Transformation beschreibt. Wir wollen dies hier für den einfachsten Fall $q_x = q$, $q_y = q_z = 0$ zeigen. Für diesen Fall ist nämlich die Matrix $a_{\alpha\mu}$ durch (9, 10), mit $\beta = -\frac{q}{c}$, gegeben. Es folgt dann aus (10, 2), wenn man vorläufig den neuen Impuls mit p'_α bezeichnet:

$$\begin{aligned} p'_1 &= a_{10} p_0 = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{iE_0}{c} = \frac{q}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{E_0}{c^2}, \\ p'_2 &= p'_3 = 0, \\ p'_0 &= a_{00} p_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{iE_0}{c}, \quad \text{d. h. } p'_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{E_0}{c}. \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse stimmen aber — wegen $q_x = q$, $q_y = q_z = 0$ — mit (14, 12) und (14, 13) überein. Die allgemeinen Formeln (14, 12) kann man daraus mit Hilfe einer nachträglichen Drehung im 3-dimensionalen Raum gewinnen.

Multiplizieren wir Gleichung (10, 7) mit m_0^2 , so erhalten wir nach (11, 8)

$$\sum_{\alpha=0}^3 p_\alpha^2 = -m_0^2 c^2.$$

Oder ausführlich, wenn wir noch berücksichtigen, daß nach (11, 6), (11, 7) $p_0 = i p_4$ ist:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2 = -m_0^2 c^2. \quad (14, 14)$$

Den Ausdruck auf der linken Seite von (14, 14) kann man, den Ausführungen des § 8 entsprechend, als das Quadrat der Länge des Vierervektors p_a bezeichnen. Daß diese Größe negativ ausfällt, bedeutet, daß der Vektor p_a , wie auch der Geschwindigkeitsvektor u_a , im Sinne des § 8 zeitartig ist. Löst man (14, 14) nach p_4 auf, so ergibt sich die wichtige Formel

$$p_4 = \frac{E}{c} = \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}. \quad (14, 15)$$

Dabei bedeutet p den Betrag des gewöhnlichen (3-dimensionalen) Impulses

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2.$$

Die experimentelle Bestätigung des Satzes von der Trägheit der Energie sieht man mit Recht als die wichtigste Bestätigung der ganzen speziellen Relativitätstheorie an. Es handelt sich dabei um Prozesse, bei denen sich die Ruhmassen der beteiligten Teilchen ändern. Solange nämlich die Ruhmassen konstant bleiben, wird auch die gesamte kinetische Energie erhalten. Bei solchen Prozessen, die wir als elastische Stöße bezeichnen, tritt als einziges Merkmal der speziellen Relativitätstheorie die Einführung der nach (11, 11) variablen Masse an Stelle der konstanten Masse der Newtonschen Mechanik auf. Kommt dagegen eine Änderung der Ruhmassen vor, dann muß bei der Energiebilanz auch die erst in der speziellen Relativitätstheorie eingeführte Ruhenergie des Teilchens herangezogen werden. Derartige Prozesse sind z. B. die Stöße von sehr energiereichen Atomkernen, bei denen sich neue Kernarten bilden (Kernreaktionen). Die experimentelle Bestimmung der Energien und Ruhmassen der an diesen Prozessen beteiligten Teilchen hat stets zu einer quantitativen Bestätigung des Satzes von der Trägheit der Energie geführt (vgl. § 17).

Wir erwähnen noch einen anderen Prozeß, der deshalb besonders wichtig ist, weil er eine unmittelbare Bestätigung der durch (14, 7) ausgedrückten EINSTEINSCHEN Behauptung liefert, wonach die innere Energie des Teilchens genau gleich $m_0 c^2$ ist. Es handelt sich um den sogenannten Zerstrahlungsprozeß eines Elektronenpaares. Stoßen nämlich ein negatives und ein positives Elektron zusammen, so werden in der Regel zwei Photonen entstehen, während die beiden Elektronen bei dem Stoßprozeß verschwinden. Die Gesamtenergie der beiden Photonen ergibt sich gleich der Summe der mit Hilfe von (14, 9) berechneten Energien der Elektronen.

§ 15. Die dynamische Grundgleichung in 4-dimensionaler Form

In der NEWTONSCHEN Mechanik ist die Grundgleichung (13, 2) eine vektorielle Gleichung. Dies folgt aus der Bemerkung, daß die Zeit eine absolute

Bedeutung hat und daher bei der GALILEI-Transformation (1, 2), (1, 3) invariant bleibt, so daß neben $\mathbf{p}$ auch $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ ein Vektor ist. Während aber die Komponenten von $\mathbf{p}$ mit den drei ersten Komponenten eines Vektors des MINKOWSKISCHEN Raumes — des 4-dimensionalen Impulses p_α — zusammenfallen, wäre eine ähnliche Behauptung für die Komponenten von $\mathfrak{F}$ bzw. $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ offenbar unrichtig, da im MINKOWSKISCHEN Raum das Zeitelement dt nicht mehr eine invariante Größe ist. Wir müssen also, um aus den Komponenten von (13, 2) zu den drei ersten Komponenten einer 4-dimensionalen Vektorgleichung zu gelangen, das Zeitelement dt durch eine entsprechende invariante Größe ersetzen. Als solche Größe bietet sich unmittelbar das durch (8, 8) definierte Element $d\tau$ der Eigenzeit des Teilchens an. Wir müssen also Gleichung (13, 2) mit $\frac{dt}{d\tau}$ multiplizieren:

$$\mathfrak{F} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}. \quad (15, 1)$$

Die Komponenten dieser neuen Beziehung fallen dann tatsächlich mit den drei ersten Komponenten einer 4-dimensionalen Vektorgleichung zusammen:

$$K_\alpha = \frac{dp_\alpha}{d\tau}. \quad (15, 2)$$

Vergleichen wir (15, 1) mit (15, 2), so folgt unter Beachtung des Wertes (10, 5) von $\frac{dt}{d\tau}$

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} F_x, \quad K_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} F_y, \quad K_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} F_z. \quad (15, 3)$$

Gleichung (15, 2) bezeichnen wir als die 4-dimensionale Grundgleichung der relativistischen Dynamik. Danach stellt der Vektor K_α die auf das Teilchen einwirkende 4-dimensionale Kraft dar. Die drei ersten Komponenten dieser Kraft sind mit den Komponenten der gewöhnlichen (3-dimensionalen) Kraft durch (15, 3) verbunden. Die Bedeutung der vierten Komponente K_4 ergibt sich unmittelbar aus der letzten Gleichung (15, 2):

$$K_4 = \frac{dp_4}{d\tau}.$$

Beachtet man noch (14, 10), so wird

$$K_4 = \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau}. \quad (15, 4)$$

Die Komponente K_4 ist also identisch, bis auf den Faktor $\frac{1}{c}$, mit der Änderung der Gesamtenergie pro Einheit der Eigenzeit des Teilchens. Nach (10, 5) kann man noch schreiben

$$K_4 = \frac{1}{\sqrt{c^2 - q^2}} \frac{dE}{dt}. \quad (15, 4a)$$

Wir wollen eine Anwendung der Gleichung (15, 2) machen. Wir berechnen das im Sinne von (8, 2) bzw. (10, 7) definierte skalare Produkt der Vektoren K_α und u_α ,

$$\sum_{\alpha=0}^3 K_\alpha u_\alpha = \sum_{i=1}^3 K_i u_i - K_4 u_4. \quad (15, 5)$$

Berücksichtigen wir die durch (15, 3), (15, 4a) und (10, 6) gegebenen Werte der Komponenten K_α und u_α , so ergibt sich

$$\sum_{\alpha=0}^3 K_\alpha u_\alpha = \frac{1}{1 - \frac{q^2}{c^2}} \left((\mathfrak{F}q) - \frac{dE}{dt} \right). \quad (15, 6)$$

Nach (13, 6) und (14, 9) ist nun

$$(\mathfrak{F}q) - \frac{dE}{dt} = m q \frac{dq}{dt} - (c^2 - q^2) \frac{dm}{dt}. \quad (15, 7)$$

Ferner ergibt sich durch unmittelbare Differentiation von (11, 11):

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \frac{dm_0}{dt} + \frac{m}{c^2 - q^2} q \frac{dq}{dt}.$$

Führt man diesen Wert von $\frac{dm}{dt}$ in (15, 7) ein, so folgt

$$(\mathfrak{F}q) - \frac{dE}{dt} = -c \sqrt{c^2 - q^2} \frac{dm_0}{dt}. \quad (15, 8)$$

Daher schließlich:

$$\sum_{\alpha=0}^3 K_\alpha u_\alpha = - \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \frac{dm_0}{dt} = -c^2 \frac{dm_0}{d\tau}. \quad (15, 9)$$

Mit Hilfe der Gleichung (15, 9) können wir die Bewegungen, bei denen die Ruhmasse des bewegten Teilchens konstant bleibt, durch eine 'mathe-

matische Beziehung charakterisieren. Es sind dies diejenigen Bewegungen, bei denen

$$\sum_{\alpha=0}^3 K_{\alpha} u_{\alpha} = 0, \quad (15, 10)$$

d. h. bei denen die 4-dimensionale Kraft auf der 4-dimensionalen Geschwindigkeit senkrecht steht. Solche Bewegungen haben wir in § 12 als rein mechanische Prozesse bezeichnet. Diese Bezeichnung läßt sich mit Hilfe von (15, 8) unmittelbar rechtfertigen. Es folgt nämlich aus (15, 8):

$$dE = (\mathfrak{F}q) dt + c \sqrt{c^2 - q^2} dm_0. \quad (15, 11)$$

Danach ist die Änderung dE der Gesamtenergie nur dann der Arbeit $(\mathfrak{F}q)dt$ der einwirkenden Kraft gleich, wenn $dm_0 = 0$ ist. Anderenfalls muß dem bewegten Körper noch der nichtmechanische Energiebetrag $c \sqrt{c^2 - q^2} dm_0$ z. B. in Form von Wärme zugeführt werden, so daß es sich dann tatsächlich um keinen rein-mechanischen Prozeß handeln kann. Einen solchen Prozeß werden wir im nächsten Abschnitt näher diskutieren.

§ 16. Ein nichtmechanischer Prozeß. Wärmemenge und Temperatur

Wir betrachten einen Körper, der sich in einem gegebenen Inertialsystem dauernd in Ruhe befindet. Sein gewöhnlicher (3-dimensionaler) Impuls ist also gleich Null, während seine Energie nach (14, 8) und (14, 7) gleich seiner Ruhenergie ist:

$$E = E_0 = m_0 c^2.$$

Im selben Koordinatensystem befinde sich noch ein zweiter Körper in Ruhe. Von diesem zweiten Körper wollen wir annehmen, daß er als Wärmebehälter wirkt und in einem bestimmten Zeitintervall dem ersten Körper die Wärmemenge ΔQ_0 liefert. Die Energie bzw. die Ruhenergie des ersten Körpers wird also in diesem Zeitintervall die Änderung

$$\Delta E = \Delta E_0 = \Delta Q_0 \quad (16, 1)$$

erfahren. Nach (14, 7) wird sich dann auch die Ruhmasse des Körpers mit der Zeit ändern. Die Gesamtänderung Δm_0 der Ruhmasse ist mit ΔQ_0 durch die Beziehung

$$\Delta m_0 c^2 = \Delta Q_0 \quad (16, 2)$$

verbunden.

Wir betrachten nun denselben Prozeß von einem zweiten Koordinatensystem aus. Dieses bewege sich relativ zum ersten Koordinatensystem mit einer der x -Achse parallelen Translationsgeschwindigkeit v , so daß für den Übergang vom einen Koordinatensystem zum anderen die spezielle LORENTZ-Transformation (4, 12) gilt. In diesem zweiten Koordinatensystem bewegt sich der betrachtete Körper, wie auch der Wärmebehälter, mit der kon-

stanten Geschwindigkeit $q = -v$. Der 4-dimensionale Impuls des Körpers ist in diesem Koordinatensystem aus (11, 11) und (11, 12) zu berechnen. Man findet für seine drei ersten Komponenten, d. h. die Komponenten des gewöhnlichen Impulses:

$$\dot{p}_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} m_0 q, \quad \dot{p}_y = \dot{p}_z = 0. \quad (16, 3)$$

Es ist nun zu bemerken, daß, obwohl $q = \text{const}$ ist, trotzdem $\frac{d\dot{p}_x}{dt} \neq 0$ sein wird, da sich m_0 wegen der Wärmezufuhr mit der Zeit ändert. Wir werden also auf folgenden neuartigen, in der vorrelativistischen Physik kein Analogon besitzenden Effekt geführt: Zur Aufrechterhaltung einer gleichmäßigen Bewegung, bei gleichzeitiger Wärmezufuhr, ist eine Kraft erforderlich. Für die Komponenten dieser Kraft erhalten wir aus (13, 2) und (16, 3)

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} q \frac{dm_0}{dt}, \quad F_y = F_z = 0. \quad (16, 4)$$

Die Kraft ist also dem Geschwindigkeitsvektor parallel,

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \frac{dm_0}{dt} q. \quad (16, 4a)$$

Es sei noch bemerkt, daß eine entgegengesetzt gleiche Kraft auf den Wärmebehälter wirkt.

Die Kraft (16, 4) wird nach (14, 1) im Zeitintervall dt die Arbeit

$$dW = (\mathfrak{F}q) dt = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} q^2 dm_0 \quad (16, 5)$$

leisten. Der Energiesatz wird durch die allgemeine Beziehung (15, 11) ausgedrückt:

$$dE = dW + c \sqrt{c^2 - q^2} dm_0. \quad (16, 6)$$

Andererseits kann man ihn auch durch die in der Thermodynamik übliche Beziehung

$$dE = dQ + dW \quad (16, 7)$$

ausdrücken. Der Vergleich von (16, 6) und (16, 7) ergibt

$$dQ = c \sqrt{c^2 - q^2} dm_0. \quad (16, 8)$$

Da $q = \text{const}$ ist, kann man diese Gleichung sofort integrieren bzw. sie für ein endliches Zeitintervall schreiben:

$$\Delta Q = c \sqrt{c^2 - q^2} \Delta m_0. \quad (16, 8a)$$

Berücksichtigt man nun die Beziehung (16, 2), so folgt aus (16, 8a)

$$\Delta Q = \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} \Delta Q_0. \quad (16, 9)$$

Die physikalische Bedeutung dieser Gleichung ist, daß ein im zweiten Koordinatensystem messender Beobachter für die dem Körper zugeführte Wärmemenge einen Betrag ΔQ finden wird, der von dem im Ruhssystem gemessenen

Betrag ΔQ_0 verschieden, und zwar um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$ kleiner ist.

Gleichung (16, 9) ist als die Transformationsformel für Wärmemengen in der speziellen Relativitätstheorie anzusehen und stellt die eine von den zwei Grundgleichungen der relativistischen Thermodynamik dar. Für die Änderung ΔE der Gesamtenergie des Körpers folgt aus (16, 7), (16, 5) und (16, 8a)

$$\Delta E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} c^2 \Delta m_0,$$

was wegen $q = \text{const}$ mit der aus (14, 9) folgenden Beziehung übereinstimmt.

Die andere Grundgleichung der relativistischen Thermodynamik bezieht sich auf die Entropie und besagt, daß bei einer LORENTZ-Transformation der Entropiewert invariant bleibt:

$$S = \text{inv.} \quad (16, 10)$$

Diese Beziehung läßt sich auf einem ganz anderen Weg als die Gleichung (16, 9) beweisen. Nach der statistischen Deutung ist nämlich die Entropie bis auf einen konstanten Faktor mit dem Logarithmus der thermodynamischen Wahrscheinlichkeit des betreffenden Körperzustandes identisch. Der Wert dieser Wahrscheinlichkeit wird immer durch eine ganze Zahl gegeben. Es ist nun leicht einzusehen, daß eine Größe, die nur ganzzahlige Werte annimmt, bei LORENTZ-Transformationen invariant bleiben muß. Führt man nämlich zunächst eine infinitesimale LORENTZ-Transformation aus, d. h. eine solche, die einer unendlich kleinen relativen Translationsgeschwindigkeit entspricht, dann werden sich die Werte der verschiedenen physikalischen Größen nur um unendlich kleine Beträge ändern können. Daher wird jede Größe, die nur ganzzahlige Werte annimmt, bei einer solchen Transformation unverändert bleiben müssen. Andererseits kann man die zu einer endlichen Translationsgeschwindigkeit entsprechende LORENTZ-Transformation als das Endergebnis einer Reihe von aufeinanderfolgenden Transformationen mit

unendlich kleinen Translationsgeschwindigkeiten ansehen. Größen mit ganzzahligen Werten werden also auch bei endlichen LORENTZ-Transformationen invariant bleiben müssen. Mit der thermodynamischen Wahrscheinlichkeit wird aber offensichtlich auch die Entropie eine LORENTZ-invariante Größe sein, d. h., es wird Gleichung (16, 10) gelten.

Wir wollen diesen Abschnitt mit einer Anwendung der Formeln (16, 9) und (16, 10) schließen. Wir werden annehmen, daß die oben betrachtete Übertragung der Wärmemenge ΔQ_0 bzw. ΔQ reversibel ist. Die absolute Temperatur des ganzen Systems habe im Ruhssystem den Wert T_0 , im zweiten Koordinatensystem dagegen den Wert T . Die Entropieänderung des betrachteten Körpers beträgt dann im Ruhssystem

$$\Delta S_0 = \frac{\Delta Q_0}{T_0},$$

und im zweiten Koordinatensystem

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}.$$

Die Invarianz der Entropie hat nun offenbar zur Folge, daß auch die einem bestimmten Prozeß entsprechende Entropieänderung ebenfalls einen vom verwendeten Koordinatensystem unabhängigen Wert hat. Es ist also

$$\Delta S = \Delta S_0.$$

Daraus folgt

$$T = T_0 \frac{\Delta Q}{\Delta Q_0}.$$

Und wenn man (16, 9) berücksichtigt,

$$T = T_0 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}. \quad (16, 11)$$

Wie die Wärmemenge, so ist also auch die Temperatur in der relativistischen Thermodynamik keine invariante Größe: Gleichung (16, 11) stellt die Transformationsformel der Temperatur beim Übergang vom Ruhssystem zu einem beliebigen Koordinatensystem dar.

§ 17. Anwendungen

Der elastische Stoß. Beim allgemeinen Stoßproblem interessieren wir uns für die Änderungen der Impulse und Energien der stoßenden Teilchen. Dabei setzen wir von der Wechselwirkung nur voraus, daß sie lediglich bei sehr kleinen Entfernungen der Teilchen wirksam ist. Das Problem läßt sich mit Hilfe der Erhaltungssätze von Impuls und Energie lösen. Bezeichnen

wir die Impulse der beiden Teilchen vor dem Stoß mit p und $\mathfrak{P}$, nach dem Stoß dagegen mit p' und $\mathfrak{P}'$, so lautet der Impulssatz

$$p + \mathfrak{P} = p' + \mathfrak{P}'. \quad (17, 1)$$

Ferner seien die Ruhmassen der Teilchen mit m_0 und M_0 bezeichnet. Setzen wir

$$w^2 = m_0^2 c^2 + p^2, \quad W^2 = M_0^2 c^2 + P^2, \quad (17, 2)$$

so sind nach (14, 15) die Energien der Teilchen vor dem Stoß gleich cw und cW . Da nun der Stoß als elastisch angenommen wurde, bleiben nach § 12 die Ruhmassen m_0 und M_0 beim Stoßprozeß unverändert. Daher werden die Energien der Teilchen nach dem Stoß durch cw' und cW' gegeben, wobei

$$w'^2 = m_0^2 c^2 + p'^2, \quad W'^2 = M_0^2 c^2 + P'^2. \quad (17, 3)$$

Der Energiesatz lautet

$$\frac{E}{c} = w + W = w' + W'. \quad (17, 4)$$

Mit E haben wir dabei die Gesamtenergie des betrachteten Systems bezeichnet. In den Gleichungen (17, 1) und (17, 4) sind die Ruhmassen und die Komponenten der Anfangsimpulse als gegeben zu betrachten. Gesucht sind die Komponenten der Endimpulse p' und $\mathfrak{P}'$. Wir haben also vier Gleichungen für sechs Unbekannte, so daß die allgemeine Lösung zwei unbestimmte Parameter enthalten wird.

Am einfachsten gestaltet sich das Stoßproblem in demjenigen Koordinatensystem, in welchem die Anfangsimpulse p und $\mathfrak{P}$ entgegengesetzt gleich sind. Es ist dies dasjenige Koordinatensystem, in dem der Gesamtimpuls verschwindet und daher der Schwerpunkt der beiden Teilchen ruht. Es handelt sich also um das Ruhssystem des Schwerpunktes, das man oft noch kürzer als das Schwerpunktsystem bezeichnet. In diesem Koordinatensystem müssen wegen (17, 1) auch die Endwerte p' und $\mathfrak{P}'$ der Impulse entgegengesetzt gleich sein. Andererseits verlangt der Energiesatz (17, 4), daß die Beträge $p = P$ und $p' = P'$ der Impulse beim Stoß unverändert bleiben:

$$p = p'.$$

Durch den Stoßvorgang wird also lediglich die Gerade, auf der die zwei Impulse liegen, beliebig im Raume gedreht (Fig. 5). Der Ablenkungswinkel α stellt den einen unbestimmten Parameter dar. Der zweite Parameter ist der Azimutwinkel, der die Lage der durch p und p' definierten Ebene bestimmt, die ja ersichtlich um die Richtung von p beliebig gedreht werden kann.

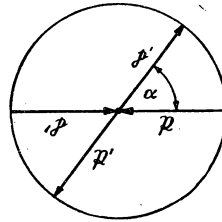


Fig. 5

Für die physikalischen Anwendungen besonders interessant ist der Fall, bei dem das eine Teilchen, z. B. das zweite, vor dem Stoß ruht:

$$\mathfrak{P} = 0. \quad (17, 5)$$

Formel (17, 1) vereinfacht sich dann zu

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' + \mathfrak{P}'. \quad (17, 6)$$

Die Energiegleichung behält ihre Form (17, 4), wobei aber jetzt aus (17, 2)

$$W = M_0 c \quad (17, 7)$$

folgt. Als ersten unbestimmten Parameter kann man in diesem Falle den Winkel Θ oder α (Fig. 6) wählen. Der zweite Parameter ist wieder der Azimut-

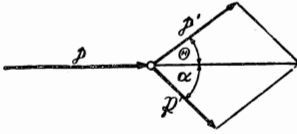


Fig. 6

winkel, welcher die Lage der um die Richtung von $\mathfrak{p}$ beliebig drehbaren Zeichenebene der Fig. 6 bestimmt; er hat für die folgende Rechnung keine Bedeutung. Die Lösung dieses speziellen Stoßproblems könnte man aus der Lösung im Schwerpunktsystem gewinnen, indem man durch eine LORENTZ-Transformation zum Ruhsystem des zweiten Teilchens übergeht.

Wir werden hier die Endformeln durch direkte Rechnung aus (17, 6), (17, 4) und (17, 7) ableiten.

Wir wählen als Parameter den Winkel Θ und schreiben die aus der Fig. 6 unmittelbar folgende trigonometrische Formel

$$P'^2 = p'^2 + p^2 - 2 p p' \cos \Theta. \quad (17, 8)$$

Quadrieren wir nun die aus (17, 3) und (17, 4) folgende Beziehung

$$\varepsilon - \sqrt{M_0^2 c^2 + P'^2} = \sqrt{m_0^2 c^2 + p'^2} \quad \left(\varepsilon = \frac{E}{c} \right),$$

so ergibt sich

$$p'^2 + m_0^2 c^2 = P'^2 + M_0^2 c^2 + \varepsilon^2 - 2 \varepsilon \sqrt{M_0^2 c^2 + P'^2}.$$

Setzt man nun in dieser Beziehung den Wert (17, 8) von P'^2 ein, so entsteht eine Gleichung, die neben dem Term mit der Quadratwurzel nur noch einen in p' linearen Teil enthält. Man kann also durch nochmaliges Quadrieren die Quadratwurzel eliminieren und zu einer Gleichung zweiten Grades in p' gelangen. Wir geben diese Gleichung ohne die elementare Zwischenrechnung an:

$$p'^2 (\varepsilon^2 - p^2 \cos^2 \Theta) - 2 p p' \cos \Theta (\varepsilon^2 - \varepsilon M_0 c - p^2) - p^2 c^2 (M_0^2 - m_0^2) = 0.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man den Wert von p' :

$$p' = \frac{p}{\varepsilon^2 - p^2 \cos^2 \Theta} \left\{ \cos \Theta (\varepsilon^2 - \varepsilon M_0 c - p^2) \right. \\ \left. \pm [\cos^2 \Theta (\varepsilon^2 - \varepsilon M_0 c - p^2)^2 + (\varepsilon^2 - p^2 \cos^2 \Theta) c^2 (M_0^2 - m_0^2)]^{1/2} \right\}. \quad (17, 9)$$

Diese Beziehung liefert schon den gesuchten Wert von p' , da auf der rechten Seite neben dem Winkel Θ nur bekannte Größen auftreten. Man kann aber (17, 9) in eine einfachere Form bringen, wenn man die aus (17, 2), (17, 4) und (17, 5) folgende Beziehung

$$\varepsilon - M_0 c = \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \quad (17, 10)$$

quadriert und von der so entstehenden Gleichung

$$\varepsilon^2 + M_0^2 c^2 - 2 \varepsilon M_0 c = p^2 + m_0^2 c^2$$

Gebrauch macht. Das Endergebnis lautet

$$p' = \frac{p}{(M_0 c + w)^2 - p^2 \cos^2 \Theta} \left\{ \cos \Theta (m_0^2 c^2 + M_0 c w) \right. \\ \left. \pm (w c + M_0 c^2) \sqrt{M_0^2 - m_0^2 \sin^2 \Theta} \right\}. \quad (17, 11)$$

Es sei noch bemerkt, daß im Falle $M_0 > m_0$ nur das positive Vorzeichen vor der Wurzel in (17, 9) und (17, 11) zugelassen werden darf. Es ist nämlich nach (17, 10) $\varepsilon > p$ und daher $\varepsilon^2 - p^2 \cos^2 \Theta > 0$. Im Falle $M_0 > m_0$ wird also die Wurzel in (17, 9) den Betrag des neben ihr stehenden Termes übersteigen, so daß nur das positive Vorzeichen zu $p' > 0$ führt. Für $M_0 < m_0$ dagegen muß man beide Vorzeichen berücksichtigen. Die Erklärung dieses Verhaltens liefert Gleichung (17, 11). Im Falle $M_0 < m_0$ durchläuft nämlich Θ zweimal den Bereich $0 \leq \Theta \leq \Theta_{\max}$, wobei $\Theta_{\max}$ sich aus

$$M_0 = m_0 \sin \Theta_{\max}$$

ergibt. Daher werden jedem Winkel Θ in diesem Bereich zwei Lösungen des Stoßproblems entsprechen. Im Falle $M_0 > m_0$ dagegen durchläuft Θ einmal den Bereich $0 \leq \Theta \leq \pi$, so daß es zu jedem Wert von Θ nur eine Lösung gibt.

Setzt man den Wert (17, 11) von p' in die erste der Gleichungen (17, 3) ein, so ergibt sich nach einer elementaren Rechnung der Wert von w' . Die Endformel lautet

$$w' = \frac{1}{(M_0 c + w)^2 - p^2 \cos^2 \Theta} \left\{ (w + M_0 c) (M_0 c w + m_0^2 c^2) \right. \\ \left. \pm c p^2 \cos \Theta \sqrt{M_0^2 - m_0^2 \sin^2 \Theta} \right\}. \quad (17, 12)$$

Um die Rechnung abzuschließen, müssen wir noch Formeln für $\mathfrak{P}'$ und W' angeben. $\mathfrak{P}'$ läßt sich sofort aus (17, 6) berechnen,

$$\mathfrak{P}' = p - p', \quad (17, 13)$$

da p' durch p' und den Winkel Θ bestimmt ist. Die Energie W' berechnet man am einfachsten aus (17, 4) und (17, 7):

$$W' = M_0 c + w - w'. \quad (17, 14)$$

Die Formeln (17, 11) bis (17, 14) stellen die vollständige Lösung des gestellten Stoßproblems dar.

Wir wollen diese Formeln auf den Fall des Stoßes eines Photons mit einem ruhenden Elektron anwenden (Compton-Streuung). Das spezielle Merkmal des Photons ist, daß seine Ruhmasse äußerst klein gegenüber der Ruhmasse des Elektrons und vielleicht sogar streng gleich Null ist. Wir dürfen also auf alle Fälle

$$m_0 = 0 \quad (17, 15)$$

setzen. Mit (17, 15) vereinfacht sich die erste der Gleichungen (17, 2) zu

$$w = p. \quad (17, 16)$$

Führt man (17, 15) und (17, 16) in (17, 11) ein, so folgt

$$p' = p \frac{M_0 c}{M_0 c + p(1 - \cos \Theta)}. \quad (17, 17)$$

Dabei wurde die Wurzel in (17, 11) mit dem positiven Vorzeichen genommen, da im vorliegenden Fall $M_0 > m_0$ ist. Für w' findet man entweder aus (17, 12) oder aus (17, 3)

$$w' = p'.$$

Wie man aus (17, 17) unmittelbar ersieht, ist immer $p' < p$ (mit Ausnahme des Falles $\Theta = 0$). Dies ist auch unmittelbar verständlich, da im Stoßprozeß das Elektron einen Zuwachs seiner, vor dem Stoß verschwindenden, kinetischen Energie erfährt und daher die Energie des Photons um denselben Betrag verkleinert werden muß.

Die Photonenergie cw hängt nun mit der Frequenz und der Wellenlänge λ der Strahlung zusammen:

$$cw = h\nu = \frac{hc}{\lambda}. \quad (17, 18)$$

Die entsprechende Beziehung nach dem Stoß lautet:

$$cw' = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'}. \quad (17, 18a)$$

Danach bedeutet die aus (17, 17) folgende Beziehung $w' < w$, daß durch den Stoß die Frequenz verkleinert, dagegen die Wellenlänge λ vergrößert wird. Führt man (17, 18) und (17, 18 a) in (17, 17) ein, so ergibt sich

$$v' = v \frac{M_0 c^2}{M_0 c^2 + h v (1 - \cos \Theta)}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{v'} = \frac{1}{v} + \frac{h}{M_0 c^2} (1 - \cos \Theta).$$

Oder in den Wellenlängen ausgedrückt:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c (1 - \cos \Theta), \quad (17, 19)$$

wobei $\lambda_c = \frac{h}{M_0 c}$ eine Konstante ist, die man als die COMPTON-Wellenlänge des Elektrons bezeichnet. Formel (17, 19) bestimmt die bei der Streuung eintretende Zunahme der Wellenlänge der Strahlung als Funktion des Streuwinkels Θ .

Der unelastische Stoß. Nach der Definition des § 12 ändern sich beim unelastischen Stoß auch die Ruhmassen beider oder wenigstens des einen der stoßenden Teilchen. Wir werden in diesem Fall mit m_0 und M_0 die Werte der Ruhmassen vor dem Stoß, mit m'_0 und M'_0 die Werte nach dem Stoß bezeichnen. Die Gleichungen (17, 1), (17, 2) und (17, 4) gelten auch hier ohne jede Änderung. Dagegen ändert sich (17, 3) zu

$$w'^2 = m'^2_0 c^2 + p'^2, \quad W'^2 = M'^2_0 c^2 + P'^2. \quad (17, 20)$$

Es sei noch bemerkt, daß nach der benutzten Definition der unelastische Stoß nicht notwendig mit einem Verlust von kinetischer Energie verbunden sein muß. Kinetische Energie wird nur dann verbraucht, wenn die Summe der Ruhmassen durch den Stoßprozeß vergrößert wird, wenn also $m'_0 + M'_0 > m_0 + M_0$ ist. Im Falle $m'_0 + M'_0 < m_0 + M_0$ wird dagegen kinetische Energie erzeugt.

Die Formeln (17, 1), (17, 2), (17, 4) und (17, 20) kann man auch dann anwenden, wenn bei dem Stoßprozeß die beiden stoßenden Teilchen verschwinden und zwei ganz neue Teilchen entstehen. Als m'_0 und M'_0 sind dann die Ruhmassen der neu entstehenden Teilchen anzusetzen. Ein solcher Fall ist die Zerstrahlung eines Elektronenpaares, wobei also $m_0 = M_0 =$ Ruhmasse des Elektrons und $m'_0 = M'_0 =$ Ruhmasse des Photons $= 0$ ist. Wir betrachten diesen Prozeß im Schwerpunktsystem der beiden Elektronen. Es ist dann $p = -\mathfrak{P}$. Daher wird nach dem Impulssatz (17, 1) auch $p' = -\mathfrak{P}'$.

d. h. die beiden Photonen werden in entgegengesetzten Richtungen mit gleichen Impulsen, also auch gleichen Energien emittiert (Fig. 7). Die Beziehung zwischen $\dot{p}$ und $\dot{p}'$ ergibt sich aus dem Energiesatz. Wegen $w = W = \sqrt{m_0^2 c^2 + \dot{p}^2}$ und $w' = W' = \dot{p}'$ ergibt sich nämlich aus (17, 4):

$$\dot{p}' = \sqrt{m_0^2 c^2 + \dot{p}^2}. \quad (17, 21)$$

Die Energie jedes Photons ist nach (17, 16)

$$h\nu = c\dot{p}' = \sqrt{m_0^2 c^4 + \dot{p}^2 c^2}. \quad (17, 22)$$

Die kleinste Photonenergie entspricht danach dem Fall $\dot{p} = 0$ und ist gleich der Ruhenergie $m_0 c^2$ des Elektrons.

Der zu der Zerstrahlung inverse Prozeß — die Erzeugung eines Elektronen-paares — tritt bei der Wechselwirkung eines genügend energiereichen Photons mit einem Atomkern ein. Dies ist ein Prozeß, welcher von dem bisher betrachteten Stoß verschieden ist. Vor der Wechselwirkung sind nämlich auch hier zwei Teilchen — das Photon und der Atomkern — anwesend, nach dem Stoß dagegen drei: Der Atomkern und die beiden Elektronen. Das wichtigste Merkmal dieses Prozesses, welches für die experimentelle Bestätigung des Satzes von der Trägheit der Energie von Bedeutung ist, kann man aber unmittelbar aus dem Energiesatz ableiten. Bezeichnen wir nämlich

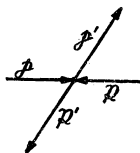


Fig. 7

die Photonenergie mit $h\nu$; die Ruhmassen des Atomkernes und der Elektronen mit M_0 und m_0 und die Endwerte der Impulse der drei Teilchen mit $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}_-$ und $\mathfrak{p}_+$, so gilt:

$$h\nu + M_0 c^2 = \sqrt{M_0^2 c^4 + \mathfrak{P}^2 c^2} + \sqrt{m_0^2 c^4 + \mathfrak{p}_-^2 c^2} + \sqrt{m_0^2 c^4 + \mathfrak{p}_+^2 c^2}. \quad (17, 23)$$

Dabei wurde angenommen, daß der Atomkern sich vor der Wechselwirkung in Ruhe befand. Aus dieser Beziehung folgt unmittelbar

$$h\nu > 2 m_0 c^2. \quad (17, 23a)$$

Das heißt, der Prozeß ist nur bei Photonen möglich, deren Energie die Summe der Ruhenergien der beiden Elektronen übersteigt.

Als ein weiteres Beispiel zum unelastischen Stoß erwähnen wir die Kernreaktionen. Wenn dabei auch nach dem Stoß nur zwei Teilchen vorhanden sind, ist der Prozeß wieder durch die Gleichungen (17, 1), (17, 2), (17, 4) und (17, 20) beschrieben. Man kann aber in diesem Fall die Energiegleichung vereinfachen, da dabei in der Regel die Geschwindigkeiten aller Teilchen klein im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit sind. Für solche Teilchen,

die man gewöhnlich als nichtrelativistisch bezeichnet, gilt in guter Näherung die aus (14, 8) und (14, 5 a) folgende Beziehung

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 q^2.$$

Daher reduziert sich der Energiesatz (17, 4) auf

$$(m_0 + M_0)c^2 + E_{\text{kin}} = (m'_0 + M'_0)c^2 + E'_{\text{kin}}. \quad (17, 24)$$

Dabei bedeutet E_{kin} und E'_{kin} die Summe der mit Hilfe von (14, 5 a) berechneten kinetischen Energien vor und nach dem Stoß. Das heißt, wenn wir mit q, Q und q', Q' die Geschwindigkeiten der Teilchen vor und nach dem Stoß bezeichnen:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 q^2 + \frac{1}{2} M_0 Q^2, \quad E'_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m'_0 q'^2 + \frac{1}{2} M'_0 Q'^2. \quad (17, 25)$$

Von dieser Gleichung wurde bei der experimentellen Prüfung des Satzes von der Trägheit der Energie (§ 14) Gebrauch gemacht.

Zerfall eines instabilen Teilchens. Der einfachste Fall liegt offenbar dann vor, wenn das instabile Teilchen in zwei neue Teilchen zerfällt. Auch hier lassen sich die wichtigsten Ergebnisse aus den Erhaltungssätzen ableiten. Der Einfachheit halber betrachten wir den Prozeß im Ruhssystem des ursprünglichen Teilchens. Es folgt dann aus dem Impulssatz, daß die Impulse p' und p'' der beiden neuen Teilchen die Summe Null haben müssen,

$$p' = -p''. \quad (17, 26)$$

Bezeichnen wir mit M_0 die Ruhmasse des ursprünglichen Teilchens und mit m'_0, m''_0 diejenigen der neuen Teilchen, so lautet der Energiesatz

$$M_0 c = \sqrt{m'^2_0 c^2 + p'^2} + \sqrt{m''^2_0 c^2 + p'^2}. \quad (17, 27)$$

Dabei haben wir die aus (17, 26) folgende Beziehung $p'' = -p'$ berücksichtigt. Sind die Ruhmassen M_0, m'_0 und m''_0 bekannt, so kann man aus (17, 27) den Wert von p' bestimmen. Bei dieser Zerfallsart werden also beim Zerfall von ruhenden Teilchen die neuen Teilchen immer mit dem aus (17, 27) folgenden Impuls p' , und daher mit den eindeutig definierten Energiewerten

$$cw' = \sqrt{m'^2_0 c^4 + p'^2 c^2}, \quad cw'' = \sqrt{m''^2_0 c^4 + p'^2 c^2} \quad (17, 28)$$

emittiert.

Auch der Zerfall in mehr als zwei neuen Teilchen läßt sich ähnlich behandeln. Liegt z. B. ein Zerfall in drei neue Teilchen vor, so lauten die Erhaltungssätze im Ruhssystem des ursprünglichen Teilchens:

$$0 = p' + p'' + p''',$$

$$M_0 c = \sqrt{m_0'^2 c^2 + p'^2} + \sqrt{m_0''^2 c^2 + p''^2} + \sqrt{m_0'''^2 c^2 + p'''^2}.$$

Wir werden diese Gleichungen nicht näher diskutieren. Nur eine wichtige qualitative Folgerung sei hier erwähnt. Die Impulsgleichung kann jetzt nicht mehr, wie im vorigen Fall, die nach dem Zerfall vorkommenden Impulsbeträge p', p'', p''' auf eine einzige Größe reduzieren. Deshalb folgen jetzt aus der Energiegleichung nicht mehr eindeutig bestimmte Werte dieser Größen. Bei einem Zerfall mit mehr als zwei Produktteilchen werden also die neuen Teilchen nicht mehr — wie im Falle von zwei Produktteilchen — mit eindeutig bestimmten Energiewerten emittiert, sondern werden ein kontinuierliches Energiespektrum zeigen.

Kapitel III ELEKTRODYNAMIK

§ 18. Tensoren. Tensoralgebra

Für die LORENTZ-invariante Formulierung sowohl der MAXWELLSchen Theorie als auch der in den nächsten Kapiteln zu entwickelnden Mechanik eines kontinuierlichen Mediums wird außer dem in § 10 eingeführten Vektorbegriff noch der allgemeinere Begriff des Tensors nötig. In diesem und dem folgenden Abschnitt werden wir diejenigen Elemente der Tensorrechnung zusammenstellen, die für die Durchführung dieses Programms erforderlich sind.

Wie wir in § 4 gesehen haben, folgt aus dem Relativitätsprinzip, daß der Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen durch eine lineare Transformation beschrieben wird. Sind also x_i und x'_i die Koordinaten in zwei beliebigen Inertialsystemen, so bestehen zwischen ihnen Beziehungen der Form (9, 1):

$$x'_i = \sum_{\varrho=1}^4 a_{i\varrho} x_{\varrho}.$$

Dabei müssen die konstanten Koeffizienten $a_{i\varrho}$ den aus der Identität (3, 3) folgenden Beziehungen (9, 2) genügen. Wie wir schon in § 9 bemerkt haben, lassen sich die Formeln einfacher schreiben, wenn wir statt der reellen Zeitkoordinate $x_4 = ct$ die imaginäre $x_0 = ict$ verwenden. Dann geht nämlich zunächst (3, 3) in die Form (9, 4) über:

$$\sum_{\varrho=0}^3 x'_{\varrho} x'_{\varrho} = \sum_{\varrho=0}^3 x_{\varrho} x_{\varrho}. \quad (18, 1)$$

Für die Koeffizienten $a_{\varrho\mu}$ der allgemeinen LORENTZ-Transformation, welche sich jetzt in der Form (9, 5) schreiben läßt,

$$x'_i = \sum_{\varrho=0}^3 a_{i\varrho} x_{\varrho}, \quad (18, 2)$$

ergeben sich aus (18, 1) die Beziehungen (9, 6) und (9, 9):

$$\sum_{\varrho=0}^3 a_{\varrho\lambda} a_{\varrho\mu} = \delta_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho=0}^3 a_{\lambda\varrho} a_{\mu\varrho}. \quad (18, 3)$$

Dagegen hätten wir bei Verwendung von $x_4 = ct$ die aus (3, 3) folgenden komplizierteren Beziehungen (9, 2) mit der ebenfalls komplizierteren Ma-

trix $\eta_{\lambda\mu}$ an Stelle von $\delta_{\lambda\mu}$. Wir entscheiden uns daher, im folgenden von der imaginären Koordinate x_0 systematischen Gebrauch zu machen¹⁾. Ferner

wollen wir künftig zur Abkürzung $\sum_e$ statt $\sum_{e=0}^3$ schreiben.

Die Definition eines Vektors haben wir schon in § 10 gegeben. Bei Verwendung eines beliebigen Koordinatensystems sollte man von einer infinitesimalen Verrückung dx_μ und der allgemeinen Transformationsformel für ihre Komponenten,

$$dx'_i = \sum_e \frac{\partial x'_i}{\partial x_e} dx_e, \quad (18, 4)$$

ausgehen. In der speziellen Relativitätstheorie aber, in der wir nur die Inertialsysteme zu berücksichtigen brauchen, sind die in (18, 4) eingehenden

partiellen Ableitungen $\frac{\partial x'_i}{\partial x_e}$ nach (18, 2) mit den konstanten Koeffizienten $a_{\lambda e}$

identisch, so daß man auch endliche Verrückungen oder direkt die Transformationsformeln (18, 2) für die Koordinaten selbst verwenden darf. Nach der in § 10 gegebenen Definition ist eine 4-komponentige Größe ein Vektor, wenn die Werte A'_i und A_λ ihrer Komponenten in den beiden durch (18, 2) verbundenen Koordinatensystemen die Beziehung (10, 2),

$$A'_i = \sum_e a_{\lambda e} A_e, \quad (18, 5)$$

erfüllen. Dabei sind die Koeffizienten $a_{\lambda e}$ in (18, 5) die gleichen wie in (18, 2).

Der Begriff des Tensors wurde erstmals in der NEWTONSchen Mechanik zur Beschreibung des inneren Spannungszustandes eines elastischen Mediums verwendet. Diese sich zunächst auf den dreidimensionalen Raum beziehende Definition kann man ohne weiteres auch auf Räume beliebiger Dimensionszahl übertragen. Wir wollen hier die Definition für den uns interessierenden MINKOWSKISchen Raum mit $n=4$ Dimensionen geben. Ein Tensor zweiter Stufe ist eine Größe mit $n^2=16$ Komponenten. Diese Komponenten bezeichnen wir mit Hilfe von zwei Indizes, z. B. $A_{\lambda\mu}$, wobei jeder Index unabhängig vom anderen die Werte 0, 1, 2 und 3 durchläuft. In einem anderen Koordinatensystem x'_i werden die Komponenten dieses Tensors andere Werte $A'_{\lambda\mu}$ annehmen. Die mathematische Definition des Tensors lautet nun: Die im Koordinatensystem x_μ durch die Komponenten $A_{\lambda\mu}$ definierte Größe ist ein Tensor, wenn sie in jedem anderen Koordinatensystem x'_μ die sich aus der Beziehung

$$A'_{\lambda\mu} = \sum_{\rho\sigma} a_{\lambda\rho} a_{\mu\sigma} A_{\rho\sigma} \quad (18, 6)$$

¹⁾ Diese formale Vereinfachung ist allerdings auch mit einigen Nachteilen verbunden, wie z. B. das Wegfallen der bei Verwendung von beliebigen Koordinatensystemen wichtigen Unterscheidung zwischen kovarianten und kontravarianten Größen. In der speziellen Relativitätstheorie aber, in der man sich auf die Verwendung der Inertialsysteme beschränken darf, sind diese Nachteile unwesentlich.

ergebenden Komponenten hat. Dabei sind die in (18, 6) eintretenden Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ mit denjenigen identisch, welche die von x_μ zu x'_μ führende Transformation (18, 2) bestimmen. Die Beziehung (18, 6) werden wir als die Transformationsformel für einen Tensor zweiter Stufe bezeichnen.

Ähnlich kann man auch Tensoren dritter, vierter usw. Stufe definieren. Z. B. ist ein Tensor dritter Stufe eine Größe mit $n^3 = 64$ Komponenten $A_{\lambda\mu\nu}$, wenn die Werte $A'_{\lambda\mu\nu}$ ihrer Komponenten im Koordinatensystem x'_μ durch

$$A'_{\lambda\mu\nu} = \sum_{\varrho\sigma\tau} a_{\lambda\varrho} a_{\mu\sigma} a_{\nu\tau} A_{\varrho\sigma\tau} \quad (18, 7)$$

gegeben sind (wobei die $a_{\lambda\mu}$ wieder dieselben Koeffizienten wie in (18, 2) sind). Man sieht nun sofort ein, daß in dem so entstandenen allgemeinen Tensorbegriff auch der des Vektors als ein Spezialfall enthalten ist. Mit seinen $4 = n^1$ Komponenten kann man nämlich den Vektor als den Tensor erster Stufe auffassen. Man kann sogar noch einen Schritt weiter gehen und die skalare Größe mit ihrer einzigen Komponente wegen $1 = n^0$ als den Tensor nullter Stufe bezeichnen.

Tensoralgebra. Betrachten wir zwei Tensoren derselben, z. B. der zweiten, Stufe. Ihre Komponenten $A_{\lambda\mu}$ und $B_{\lambda\mu}$ müssen sich nach (18, 6) transformieren:

$$A'_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho\sigma} a_{\lambda\varrho} a_{\mu\sigma} A_{\varrho\sigma}, \quad B'_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho\sigma} a_{\lambda\varrho} a_{\mu\sigma} B_{\varrho\sigma}.$$

Addieren wir diese Gleichungen, so folgt

$$A'_{\lambda\mu} + B'_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho\sigma} a_{\lambda\varrho} a_{\mu\sigma} (A_{\varrho\sigma} + B_{\varrho\sigma}). \quad (18, 8)$$

Danach genügen die Summen der zu einem und demselben Koordinatensystem gehörigen Komponenten zweier Tensoren der Definitionsgleichung (18, 6) des Tensors. Die Summe von zwei Tensoren ist also ebenfalls ein Tensor. Wie man sich leicht überzeugt, gilt dieser Satz auch für die Summe von mehr als zwei bzw. für die Differenz von zwei Tensoren. Entsprechendes gilt auch für Tensoren beliebiger Stufe, unter der Bedingung, daß alle Summanden von derselben Stufe sind.

Wir betrachten nun eine skalare Größe a und einen Tensor, z. B. zweiter Stufe $A_{\lambda\mu}$. Im zweiten Koordinatensystem x'_μ hat die skalare Größe denselben Wert wie in x_μ :

$$a' = a.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit (18, 6), so folgt

$$a' A'_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho\sigma} a_{\lambda\varrho} a_{\mu\sigma} (a A_{\varrho\sigma}). \quad (18, 9)$$

Diese Beziehung besagt, daß das Produkt eines Skalars mit einem Tensor wieder ein Tensor ist, und zwar derselben Stufe wie der ursprüngliche Tensor:

$$a A_{\lambda\mu} = B_{\lambda\mu}.$$

Betrachten wir dagegen statt des Skalars einen Vektor b_ν , so gilt für ihn die Transformationsformel (18, 5):

$$b'_\nu = \sum_\tau a_{\nu\tau} b_\tau.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit (18, 6), so folgt

$$A'_{\lambda\mu} b'_\nu = \sum_{\varrho\sigma\tau} a_{\lambda\varrho} a_{\mu\sigma} a_{\nu\tau} (A_{\varrho\sigma} b_\tau). \quad (18, 10)$$

Nach der Definitionsgleichung (18, 7) sind also die $16 \cdot 4 = 64$ Produkte $A_{\lambda\mu} b_\nu$ die Komponenten eines Tensors dritter Stufe:

$$A_{\lambda\mu} b_\nu = B_{\lambda\mu\nu}.$$

Diesen Tensor nennen wir das Produkt des Tensors $A_{\lambda\mu}$ mit dem Vektor b_ν . Allgemein ergibt sich aus der Multiplikation eines Tensors der Stufe s mit einem zweiten der Stufe s' ein neuer Tensor der Stufe $s + s'$. Der Satz kann offensichtlich auch für mehr als zwei Faktoren verallgemeinert werden.

Eine andere wichtige Operation der Tensorrechnung ist die Verjüngung oder Kontraktion. Durch diese Operation entsteht aus einem gegebenen Tensor s -ter Stufe (mit $s \geq 2$) ein neuer Tensor der Stufe $s - 2$. Betrachten wir z. B. den Tensor dritter Stufe $A_{\lambda\mu\nu}$, so besteht die Kontraktion darin, daß wir zwei der Indizes — z. B. μ und ν — gleichsetzen und über den jetzt zweimal auftretenden Index summieren. Die so entstehende Größe $\sum_\mu A_{\lambda\mu\mu}$, welche offensichtlich nur vier Komponenten hat (entsprechend den Werten $\lambda = 0, 1, 2$ und 3), ist ein Tensor erster Stufe, d. h. ein Vektor. Der Beweis folgt unmittelbar aus (18, 7), wenn wir in dieser Formel $\nu = \mu$ setzen und über μ summieren:

$$\sum_\mu A'_{\lambda\mu\mu} = \sum_{\mu\varrho\sigma\tau} a_{\lambda\varrho} a_{\mu\sigma} a_{\mu\tau} A_{\varrho\sigma\tau} = \sum_{\varrho\sigma\tau} a_{\lambda\varrho} \left(\sum_\mu a_{\mu\sigma} a_{\mu\tau} \right) A_{\varrho\sigma\tau}.$$

Also wegen (18, 3):

$$\sum_\mu A'_{\lambda\mu\mu} = \sum_{\varrho\sigma\tau} a_{\lambda\varrho} \delta_{\sigma\tau} A_{\varrho\sigma\tau}.$$

Die Summation über τ ergibt nun

$$\sum_\mu A'_{\lambda\mu\mu} = \sum_{\varrho\sigma} a_{\lambda\varrho} A_{\varrho\sigma\sigma} = \sum_{\varrho} a_{\lambda\varrho} \left(\sum_{\sigma} A_{\varrho\sigma\sigma} \right).$$

Die vier Größen $\sum_{\sigma} A_{\rho\sigma\sigma}$ transformieren sich also nach der Gleichung (18, 5), d. h. sie sind die Komponenten eines Vektors. Bei den Anwendungen tritt oft die Multiplikation von zwei Tensoren mit gleichzeitiger Kontraktion auf. So entsteht z. B. aus dem Tensor $A_{\lambda\mu}$ und dem Vektor B_{ν} der Vektor $\sum_{\mu} A_{\lambda\mu} B_{\mu}$. Besonders wichtig ist das skalare Produkt von zwei Vektoren A_{λ} und B_{λ} :

$$\sum_{\lambda} A_{\lambda} B_{\lambda} = \text{skalare Größe.} \quad (18, 11)$$

Ist insbesondere $B_{\lambda} = A_{\lambda}$, so liefert (18, 11) das Quadrat des Betrages von A_{λ} :

$$\sum_{\lambda} A_{\lambda} A_{\lambda} = (\text{Betrag von } A_{\lambda})^2. \quad (18, 12)$$

Spezialfälle dieser Formel sind die Gleichungen (8, 2), (8, 3) und (10, 7).

Wir werden jetzt die Symmetrieeigenschaften von Tensoren kurz erörtern. Wir gehen von einem Tensor zweiter Stufe $A_{\lambda\mu}$ aus. Wir nennen einen solchen Tensor *symmetrisch*, wenn die Beziehung

$$A_{\lambda\mu} = A_{\mu\lambda} \quad (18, 13)$$

für alle λ und μ erfüllt wird. Dagegen wird der Tensor *schiefsymmetrisch* oder *antisymmetrisch* genannt, wenn

$$A_{\lambda\mu} = -A_{\mu\lambda} \quad (18, 14)$$

ist. Schreiben wir die Komponenten $A_{\lambda\mu}$ in Matrixform, so ergibt sich im Falle (18, 13) eine symmetrische Matrix:

$$A_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} \varrho & \alpha & \beta & \xi \\ \alpha & \sigma & \gamma & \eta \\ \beta & \gamma & \tau & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & \varphi \end{pmatrix}. \quad (18, 13a)$$

Danach hat der symmetrische Tensor insgesamt zehn voneinander unabhängige Komponenten. Im Falle (18, 14) dagegen ergibt sich eine schiefsymmetrische Matrix:

$$A_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \xi \\ -\alpha & 0 & \gamma & \eta \\ -\beta & -\gamma & 0 & \zeta \\ -\xi & -\eta & -\zeta & 0 \end{pmatrix}. \quad (18, 14a)^1$$

¹⁾ Das Verschwinden der Diagonalelemente ergibt sich aus (18, 14), wenn man $\mu = \lambda$ setzt: $A_{\lambda\lambda} = -A_{\lambda\lambda} = 0$.

Der antisymmetrische Tensor hat also sechs voneinander unabhängige Komponenten. Die Symmetrieeigenschaften sind deshalb besonders interessant, weil sie gegen Koordinaten-Transformationen invariant sind. Dies folgt unmittelbar aus der Definitionsformel (18, 6). Vertauscht man nämlich λ und μ , so ergibt sich

$$A'_{\mu\lambda} = \sum_{\varrho\sigma} a_{\mu\varrho} a_{\lambda\sigma} A_{\varrho\sigma}. \quad (18, 15)$$

Andererseits sieht man sofort ein, daß die Benennung von Indizes, über welche summiert wird, beliebig geändert werden darf. Man kann also auf der rechten Seite von (18, 15) die Buchstaben ϱ und σ miteinander vertauschen:

$$A'_{\mu\lambda} = \sum_{\varrho\sigma} a_{\mu\sigma} a_{\lambda\varrho} A_{\sigma\varrho}. \quad (18, 15a)$$

Aus (18, 15a) und (18, 6) folgt aber ohne weiteres, daß im Falle (18, 13) $A'_{\mu\lambda} = A'_{\lambda\mu}$, dagegen im Falle (18, 14) $A'_{\mu\lambda} = -A'_{\lambda\mu}$ ist. Der Tensor wird also auch im Koordinatensystem x'_μ symmetrisch bzw. antisymmetrisch sein, wenn er diese Eigenschaft im Koordinatensystem x_μ besitzt. Diese beiden Symmetrieeigenschaften lassen sich auch bei Tensoren höherer Stufe definieren. Nur muß man dann das betreffende Paar von Indizes explizite angeben, da ja noch weitere Indizes vorhanden sind. Zum Beispiel wird der Tensor $A_{\lambda\mu\nu}$ antisymmetrisch in bezug auf die beiden ersten Indizes genannt, wenn die Beziehung

$$A_{\lambda\mu\nu} = -A_{\mu\lambda\nu} \quad (18, 16)$$

für alle Werte von λ , μ und ν erfüllt ist.

Es sei noch ein spezieller Tensor erwähnt, den wir später benötigen werden. Es ist dies ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe, dessen Komponenten in jedem Koordinatensystem durch die Diagonalmatrix (9, 7),

$$\delta_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (18, 17)$$

gegeben werden. Der Beweis erfolgt wieder mit Hilfe der Transformationsformel (18, 6). Sind nämlich die Komponenten dieses Tensors im Koordinatensystem x_μ durch (18, 17) gegeben, dann werden seine Komponenten im Koordinatensystem x'_μ nach (18, 6):

$$\delta'_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho\sigma} a_{\lambda\varrho} a_{\mu\sigma} \delta_{\varrho\sigma}.$$

Führt man auf der rechten Seite zunächst die Summation über σ aus, so folgt

$$\delta'_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho} a_{\lambda\varrho} a_{\mu\varrho}.$$

Daher ist nach (18, 3)

$$\delta'_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu}. \quad (18, 18)$$

Der Tensor hat also in allen Koordinatensystemen die Komponenten (18, 17).

§ 19. Tensoranalysis

Betrachten wir die Bewegung eines Punktteilchens, so ist sein Geschwindigkeitsvektor u_λ nur an den Punkten seiner Weltlinie bestimmt. Liegt dagegen die Bewegung einer Flüssigkeit vor, dann ist der Geschwindigkeitsvektor an allen Punkten des 4-dimensionalen Raumes definiert. In diesem letzten Fall dürfen wir von einem *Vektorfeld* sprechen. Offenbar wird man dieses Vektorfeld in der Weise beschreiben müssen, daß man seine Komponenten u_λ für jeden Punkt des Raumes angibt, was durch Angabe der vier Funktionen $u_\lambda(x_\mu)$ erreicht ist. Dabei verlangt die Vektoreigenschaft, daß an jedem Punkt die Transformationsformel (18, 5) gilt:

$$u'_\lambda(x'_\mu) = \sum_{\varrho} a_{\lambda\varrho} u_{\varrho}(x_{\mu}). \quad (19, 1)$$

In ähnlicher Weise kann man auch Tensorfelder beliebiger Stufe einführen.

Wir betrachten zunächst ein Tensorfeld nullter Stufe, d. h. ein skalares Feld $A(x_\mu)$. Bilden wir die Ableitungen der Funktion A nach den Koordinaten x_μ , so läßt sich leicht zeigen, daß diese vier Ableitungen die Komponenten eines Vektors sind. Berechnen wir nämlich diese Ableitungen im Koordinatensystem x'_μ , so wird wegen $A = A'$:

$$\frac{\partial A'}{\partial x'_\lambda} = \frac{\partial A}{\partial x'_\lambda} = \sum_{\varrho} \frac{\partial A}{\partial x_{\varrho}} \frac{\partial x_{\varrho}}{\partial x'_\lambda}.$$

Wenn man $\frac{\partial x_{\varrho}}{\partial x'_\lambda}$ aus (9, 8) entnimmt, folgt:

$$\frac{\partial A'}{\partial x'_\lambda} = \sum_{\varrho} a_{\lambda\varrho} \frac{\partial A}{\partial x_{\varrho}}, \quad (19, 2)$$

was nach (18, 5) den Beweis unserer Behauptung liefert. Den Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial A}{\partial x_\lambda}$ nennen wir den (4-dimensionalen) Gradienten der skalaren Größe A .

Betrachten wir nun ein Vektorfeld $A_\lambda(x_\mu)$, so läßt es sich ebenso einfach zeigen, daß die $4 \cdot 4 = 16$ Ableitungen $\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}$ die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe sind. Man geht jetzt von der Beziehung (18, 5) aus:

$$A'_\lambda = \sum_{\varrho} a_{\lambda\varrho} A_{\varrho}.$$

Differenziert man diese Beziehung nach x'_μ , so folgt daraus wegen der Konstanz von $a_{\lambda\varrho}$:

$$\frac{\partial A'_\lambda}{\partial x'_\mu} = \sum_{\varrho} a_{\lambda\varrho} \frac{\partial A_\varrho}{\partial x'_\mu} = \sum_{\varrho\sigma} a_{\lambda\varrho} \frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\sigma} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\mu},$$

und wenn man $\frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\mu}$ aus (9, 8) entnimmt,

$$\frac{\partial A'_\lambda}{\partial x'_\mu} = \sum_{\varrho\sigma} a_{\lambda\varrho} a_{\mu\sigma} \frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\sigma}; \quad (19, 3)$$

nach (18, 6) beweist dies die Tensoreigenschaft von $\frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\sigma}$. Ähnlich läßt sich allgemein zeigen, daß durch die Differentiation der Komponenten eines Tensorfeldes der Stufe s ein Tensorfeld der Stufe $s+1$ entsteht.

Aus diesem allgemeinen Satz werden wir einige wichtige Formeln ableiten. Gehen wir zunächst von einem Vektorfeld A_λ aus, so ist neben $\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}$ auch $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}$ ein Tensor zweiter Stufe. Daher wird auch die Differenz dieser zwei Tensoren ein Tensor sein:

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} = B_{\lambda\mu}. \quad (19, 4)$$

Ferner sieht man sofort, daß dieser Tensor antisymmetrisch ist,

$$B_{\lambda\mu} = -B_{\mu\lambda}.$$

Der Tensor (19, 4) stellt offensichtlich die Verallgemeinerung der im 3-dimensionalen Raum als Rotation eines Vektorfeldes bezeichneten Größe dar. Während aber im 3-dimensionalen Raum die Rotation eines Vektorfeldes wieder als ein Vektor aufgefaßt werden kann, ist dies im 4-dimensionalen Raum nicht mehr möglich. Den Grund dafür kann man leicht angeben. Im 3-dimensionalen Raum hat der antisymmetrische Tensor zweiter Stufe drei voneinander unabhängige Komponenten, d. h. genau so viele, wie ein Vektor. Dagegen ist die Zahl seiner Komponenten im 4-dimensionalen Raum gleich sechs, also von der Zahl der Komponenten eines Vektors verschieden. Es sei noch bemerkt, daß der Ausdruck auf der linken Seite von (19, 4) deshalb besonders interessant ist, weil er die Tensoreigenschaft auch bei Verwendung eines beliebigen Koordinatensystems behält (was z. B. für $\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}$ nicht gilt). Wie wir in § 21 sehen werden, spielt ein Tensor der Form (19, 4) in der Theorie des elektromagnetischen Feldes eine wichtige Rolle.

Gehen wir von einem beliebigen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe $F_{\lambda\mu}$ aus,

$$F_{\lambda\mu} = -F_{\mu\lambda}, \quad (19, 5)$$

so können wir durch Differentiation zunächst den Tensor $\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}$ bilden. Ein für die MAXWELLSche Theorie wichtiger Tensor ergibt sich, wenn wir zu $\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}$ die daraus durch zyklische Vertauschung der Indizes λ, μ, ν entstehenden zwei weiteren Tensoren $\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}$ und $\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}$ addieren:

$$A_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}. \quad (19, 6)$$

Dieser Tensor hat die Eigenschaft, daß er in bezug auf jedes Indizespaar antisymmetrisch oder — wie man dafür sagt — vollständig antisymmetrisch ist:

$$A_{\lambda\mu\nu} = -A_{\mu\lambda\nu} = -A_{\lambda\nu\mu} = -A_{\nu\mu\lambda}. \quad (19, 7)$$

Vertauscht man nämlich in (19, 6) die Indizes λ und μ , so folgt aus (19, 5)

$$A_{\mu\lambda\nu} = -\frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda} = -\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} = -A_{\lambda\mu\nu}.$$

Ähnlich bestätigt man auch die anderen Beziehungen (19, 7). Aus (19, 7) folgt nun, daß alle Komponenten $A_{\lambda\mu\nu}$, bei welchen gleiche Indizes vorkommen, identisch gleich Null sind. Es werden also nur diejenigen Komponenten nicht identisch verschwinden, bei denen alle drei Indizes voneinander verschiedene Werte haben. Solche Wertsysteme der Indizes gibt es aber offenbar nur vier: (1, 2, 3), (2, 3, 0), (3, 0, 1) und (0, 1, 2). Beachtet man noch, daß sich bei einer beliebigen Permutation, z. B. von 1, 2, 3, nur das Vorzeichen von $A_{\lambda\mu\nu}$ ändern kann, so folgt, daß der Tensor (19, 6) vier voneinander unabhängige Komponenten hat, d. h. genau so viele wie ein 4-dimensionaler Vektor. Es läßt sich ferner zeigen, daß man dem Tensor (19, 6) eindeutig einen Vektor zuordnen kann. Aus diesem Grunde bezeichnet man den Tensor (19, 6) auch als Pseudovektor.

Betrachten wir nochmals den aus dem Vektor A_λ gebildeten Tensor $\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}$, so können wir daraus durch Kontraktion eine skalare Größe bilden:

$$\sum_\lambda \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\lambda} = \text{skalare Größe}. \quad (19, 8)$$

Diese Operation entspricht der Divergenzbildung im 3-dimensionalen Raum. Dementsprechend nennt man den Ausdruck (19, 8) die 4-dimensionale Divergenz des Vektorfeldes A_λ . Eine ähnliche Operation läßt sich auch bei Tensoren höherer Stufe definieren. Geht man z. B. von einem Tensor zweiter Stufe aus, so gilt zunächst

$$\frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = \text{Tensor der Stufe 3}.$$

Daraus ergibt sich nach Kontraktion über ν und z. B. μ :

$$\sum_{\mu} \frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial x_{\mu}} = \text{Vektor.} \quad (19, 9)$$

Die Differentialoperation kann auch mehr als einmal auf ein Tensorfeld angewandt werden. Ist also $A_{\lambda\dots}$ ein Tensorfeld der Stufe s , so wird $\frac{\partial A_{\lambda\dots}}{\partial x_{\sigma}}$ ein Tensorfeld der Stufe $s+1$, $\frac{\partial^2 A_{\lambda\dots}}{\partial x_{\sigma} \partial x_{\sigma}}$ ein Tensorfeld der Stufe $s+2$ usw. Zu einer besonders wichtigen Formel gelangen wir, wenn wir nach zweimaliger Anwendung des Differentialoperators in bezug auf die den Differentiationen entsprechenden Indizes kontrahieren. Es ergibt sich dann

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial^2 A_{\lambda\dots}}{\partial x_{\sigma} \partial x_{\sigma}} = \text{Tensor der Stufe } s.$$

Der Operator $\sum_{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x_{\sigma} \partial x_{\sigma}}$ läßt also die Stufe des Tensorfeldes unverändert,

d. h., er ist ein skalarer Operator. Formal erscheint dieser Operator als die unmittelbare 4-dimensionale Erweiterung des aus dem 3-dimensionalen Raum bekannten LAPLACE-Operators

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta. \quad (19, 10)$$

Dies ist aber eine Folge der Verwendung der imaginären Zeitkoordinate $x_0 = ict$. Geht man zu der reellen Koordinate $x_4 = ct$ zurück, so ergibt sich

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x_{\sigma} \partial x_{\sigma}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}.$$

Es handelt sich also um den aus der Diskussion der Lichtausbreitung im Vakuum bekannten D'ALEMBERT-Operator,

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x_{\sigma} \partial x_{\sigma}} \equiv \square = \Delta - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}, \quad (19, 11)$$

der sich von dem 4-dimensionalen LAPLACESchen durch das negative Vorzeichen des vierten Termes unterscheidet. Damit haben wir bewiesen, daß der D'ALEMBERT-Operator eine skalare Größe im MINKOWSKISCHEN Raume ist, oder mit anderen Worten, daß er gegen die allgemeine LORENTZ-Transformation invariant ist.

§ 20. Die MAXWELLSchen Gleichungen in 4-dimensionaler Form

Wie wir schon am Ende des § 4 erwähnt haben, sind die MAXWELLSchen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes gegen die GALILEI-Transformation nicht invariant. Nehmen wir nämlich an, die MAXWELLSchen Gleichungen hätten im Koordinatensystem x_μ ihre bekannte Form; gehen wir dann durch die GALILEI-Transformation (1, 2), (1, 3) zu einem anderen Koordinatensystem x'_μ über, so werden die MAXWELLSchen Gleichungen, in den Koordinaten x'_μ ausgedrückt, eine von der ursprünglichen abweichende und wesentlich kompliziertere Gestalt annehmen. Diese Eigenschaft liefert einen neuen Beweis für die in § 1 aus der Diskussion der Lichtfortpflanzung gezogene Schlußfolgerung, daß die GALILEI-Transformation notwendig zu der Annahme eines absoluten Koordinatensystems führt. Dasjenige Koordinatensystem, in welchem die MAXWELLSchen Gleichungen ihre gewöhnliche, einfache Form annehmen, würden wir nämlich als das absolute Koordinatensystem bezeichnen müssen. Dagegen sind die MAXWELLSchen Gleichungen gegen die allgemeine LORENTZ-Transformation invariant, wie wir in diesem Abschnitt ausführlich beweisen wollen.

Die einfachste und für die Physik wichtigste Art von invarianten Gleichungen sind die Tensorgleichungen. Diese drücken die Gleichheit zweier Tensoren derselben Stufe aus. Sind z. B. $A_{\lambda\mu}$ und $B_{\lambda\mu}$ zwei Tensoren zweiter Stufe, so ist das System der 16 Beziehungen

$$A_{\lambda\mu} = B_{\lambda\mu} \quad \text{für alle Werte von } \lambda, \mu \quad (20, 1)$$

eine Tensorgleichung der Stufe 2. Bringt man $B_{\lambda\mu}$ auf die linke Seite und beachtet man, daß $A_{\lambda\mu} - B_{\lambda\mu}$ ebenfalls ein Tensor ist, so folgt, daß man die allgemeine Tensorgleichung auch in der Form

$$C_{\lambda\mu} = 0 \quad (20, 2)$$

schreiben kann. Die Invarianz der Tensorgleichung (20, 2) gegen Koordinatentransformationen folgt unmittelbar aus der Bemerkung, daß nach der Transformationsformel (18, 6) die Komponenten $C'_{\lambda\mu}$ des Tensors im Koordinatensystem x'_μ homogen-lineare Funktionen der Komponenten $C_{\lambda\mu}$ in x_μ sind. Ist also Gleichung (20, 2) erfüllt, d. h. verschwinden sämtliche Komponenten $C_{\lambda\mu}$ des Tensors im Koordinatensystem x_μ , so werden auch die Komponenten $C'_{\lambda\mu}$ in einem beliebigen Koordinatensystem x'_μ verschwinden:

$$C'_{\lambda\mu} = 0. \quad (20, 2a)$$

Danach behält die Tensorgleichung die gleiche Form in allen Koordinatensystemen, d. h. sie ist gegen Koordinatentransformationen invariant.

Wie wir im folgenden zeigen werden, ist die Invarianz der MAXWELLSchen Gleichungen gegen die LORENTZ-Transformation von der eben erwähnten Art, d. h., sie folgt aus der Tatsache, daß diese Gleichungen sich als Tensorgleichungen des MINKOWSKISchen Raumes schreiben lassen. Letzteres werden wir dadurch erreichen, daß wir die bei der quantitativen Beschreibung des

elektromagnetischen Feldes verwendeten Größen als 4-dimensionale Tensoren auffassen. Wir werden dann sehen, wie bei der auf diese Weise entstehenden 4-dimensionalen Formulierung die schon in der gewöhnlichen 3-dimensionalen Form so eindrucksvolle innere Kohärenz und mathematische Eleganz der Theorie noch größer wird. Es sei noch bemerkt, daß die Invarianzeigenschaften der MAXWELLSchen Gleichungen nicht nur rein theoretisches Interesse besitzen, sondern auch in praktischer Hinsicht für die Behandlung von konkreten physikalischen Problemen wichtig sind. Man kann nämlich die Lösung eines gegebenen Problems dadurch vereinfachen, daß man zunächst ein dem Problem besonders angepaßtes Koordinatensystem verwendet. Mit Hilfe der Transformationseigenschaften der elektromagnetischen Größen kann man dann die in diesem Koordinatensystem gefundene Lösung des Problems auf irgendein anderes Koordinatensystem übertragen (vgl. § 23).

Wir gehen von der üblichen Form der MAXWELLSchen Gleichungen aus:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{c \partial t} = \mathfrak{s}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho; \quad (20, 3)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{c \partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \quad (20, 4)$$

Dabei sind $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Vektoren der elektrischen und magnetischen Feldstärke, $\mathfrak{s}$ und ϱ die Strom- und Ladungsdichte. Die Verwendung der gewöhnlichen (3-dimensionalen) Vektoren weist darauf hin, daß diese Gleichungen gegen Drehungen des 3-dimensionalen Raumes invariant sind. Die Größen $\mathfrak{s}$ und ϱ sind im allgemeinen als voneinander unabhängig zu betrachten. Nur bei Konvektionsproblemen und insbesondere in der Elektronentheorie hängt die Stromdichte $\mathfrak{s}$ mit der Ladungsdichte ϱ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ der die Ladung tragenden Materie durch die Formel

$$\mathfrak{s} = \frac{\varrho}{c} \mathfrak{q} \quad (20, 5)$$

zusammen. Es gilt aber immer die aus der ersten MAXWELLSchen Gleichungsgruppe (20, 3) folgende Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{s} + \frac{\partial \varrho}{c \partial t} = 0. \quad (20, 6)$$

Die Tatsache, daß jede von den Gleichungsgruppen (20, 3) und (20, 4) vier Gleichungen enthält, legt die Vermutung nahe, daß in der 4-dimensionalen Formulierung jede dieser Gruppen in eine Vektorgleichung übergehen wird. Ähnliche Betrachtungen lassen auch auf die Art der 4-dimensionalen Tensoren schließen, die man zur Beschreibung des elektromagnetischen Feldes verwenden muß. Die Gesamtzahl $2 \cdot 3 = 6$ der Komponenten der Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ zeigt, daß man dafür einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe $F_{\lambda\mu}$ benötigt:

$$F_{\lambda\mu} = -F_{\mu\lambda}. \quad (20, 7)$$

Die drei Komponenten von $\mathfrak{s}$ zusammen mit der Ladungsdichte ϱ werden sich zu einem 4-dimensionalen Vektor vereinigen. Auch die Struktur der Gleichungen (20, 3) spricht zugunsten dieser Zuordnungen. Die linken Seiten dieser Gleichungen enthalten nämlich die ersten Ableitungen der Feldstärken. Die entsprechende 4-dimensionale Operation wäre zunächst die Bildung des Tensors dritter Stufe $\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}$. Daraus könnte sich dann durch eine Kontraktion ein Vektor ergeben, wie es die rechte Seite von (20, 3) verlangt.

Wir werden nun durch direkte Rechnung zeigen, daß sich dieses Programm tatsächlich durchführen läßt. Die sechs unabhängigen Komponenten des antisymmetrischen Tensors $F_{\lambda\mu}$ teilen wir in zwei Gruppen ein, nämlich F_{12}, F_{23}, F_{31} und F_{01}, F_{02}, F_{03} . Während die drei ersten Komponenten reell sind, müssen die drei letzten rein imaginär sein, da sie den Index 0 enthalten, welcher der imaginären Zeitkoordinate $x_0 = ict$ entspricht. Die uns zum Ziele führende Zuordnung der Komponenten $F_{\lambda\mu}$ zu den Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ lautet:

$$\left. \begin{aligned} F_{12} &= H_z, & F_{23} &= H_x, & F_{31} &= H_y; \\ F_{01} &= iE_x, & F_{02} &= iE_y, & F_{03} &= iE_z. \end{aligned} \right\} \quad (20, 8)$$

Den aus der Stromdichte $\mathfrak{s}$ und der Ladungsdichte ϱ entstehenden 4-dimensionalen Vektor bezeichnen wir mit s_λ . Es wird also

$$s_1 = s_x, \quad s_2 = s_y, \quad s_3 = s_z; \quad s_0 = i\varrho. \quad (20, 9)$$

s_λ kann man als den 4-dimensionalen Stromdichtevektor bezeichnen.

Wir betrachten zunächst die erste der Gleichungen (20, 3),

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{c \, dt} = s_x.$$

Mit Hilfe der Zuordnungen (20, 8) und (20, 9) nimmt diese Gleichung die Form an:

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial F_{31}}{\partial x_3} - \frac{\partial F_{01}}{\partial x_0} = s_1.$$

Und da nach (20, 7) $F_{31} = -F_{13}$, $F_{01} = -F_{10}$ und $F_{11} = 0$ ist, wird:

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{10}}{\partial x_0} = \sum_e \frac{\partial}{\partial x_e} F_{1e} = s_1.$$

Ähnlich findet man für die zwei nächsten Gleichungen (20, 3)

$$\sum_e \frac{\partial}{\partial x_e} F_{2e} = s_2, \quad \sum_e \frac{\partial}{\partial x_e} F_{3e} = s_3.$$

Die letzte Gleichung (20, 3),

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \varrho,$$

ergibt in ähnlicher Weise, wenn wir sie noch mit i multiplizieren,

$$\sum_{\varrho} \frac{\partial}{\partial x_{\varrho}} F_{0\varrho} = s_0.$$

Insgesamt liefert also die Gruppe (20, 3)

$$\sum_{\varrho} \frac{\partial}{\partial x_{\varrho}} F_{\lambda\varrho} = s_{\lambda}, \quad (20, 10)$$

was nach (19, 9) tatsächlich eine Vektorgleichung des MINKOWSKISCHEN Raumes ist.

In ähnlicher Weise lassen sich auch die Gleichungen der Gruppe (20, 4) umformen. Die erste dieser Gleichungen,

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial H_x}{c \, dt} = 0,$$

liefert zunächst:

$$i \frac{\partial F_{30}}{\partial x_2} - i \frac{\partial F_{20}}{\partial x_3} + i \frac{\partial F_{23}}{\partial x_0} = 0.$$

Also schließlich

$$\frac{\partial F_{30}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_0} = 0.$$

Für die weiteren drei Gleichungen (20, 4) findet man

$$\frac{\partial F_{10}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{03}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_0} = 0,$$

$$\frac{\partial F_{20}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_0} = 0,$$

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} = 0.$$

Die linken Seiten dieser vier Gleichungen sind aber nichts anderes als die nicht-identisch verschwindenden Komponenten des durch (19, 6) definierten vollständig antisymmetrischen Tensors dritter Stufe. Daher sind diese Gleichungen der Tensor- oder Pseudovektorgleichung

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} = 0 \quad (20, 11)$$

äquivalent. Damit haben wir auch die zweite Gruppe (20, 4) der MAXWELLSchen Gleichungen in 4-dimensionale Form gebracht. Das gesamte System der MAXWELLSchen Gleichungen ist also in der Vektorgleichung (20, 10) und der Pseudovektorgleichung (20, 11) enthalten.

§ 21. Das elektromagnetische Potential

Die elektromagnetischen Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ lassen sich bekanntlich aus einem Vektorpotential $\mathfrak{A}$ und einem skalaren Potential φ ableiten. Dies folgt aus der Gleichungsgruppe (20, 4). Die letzte dieser Gleichungen bedeutet nämlich, daß $\mathfrak{H}$ die Rotation eines Vektors $\mathfrak{A}$ ist:

$$\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}. \quad (21, 1)$$

Setzt man aber (21, 1) in die erste der Gleichungen (20, 4) ein, so ergibt sich

$$\text{rot} \left(\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{c \partial t} \right) = 0.$$

Daraus folgt, daß der Vektor $\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{c \partial t}$ der Gradient einer skalaren Funktion $-\varphi$ ist:

$$\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{c \partial t} = -\text{grad } \varphi.$$

Daher

$$\mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathfrak{A}}{c \partial t}. \quad (21, 2)$$

Wir haben jetzt nur noch die erste MAXWELLSche Gleichungsgruppe (20, 3) zu berücksichtigen, welche vier Gleichungen für die vier neuen Unbekannten A_x, A_y, A_z und φ liefert. Beachtet man die Identität

$$\text{rot} (\text{rot } \mathfrak{A}) = \text{grad div } \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A},$$

so folgt aus der ersten der Gleichungen (20, 3)

$$\Delta \mathfrak{A} - \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{c^2 \partial t^2} - \text{grad} \left(\text{div } \mathfrak{A} + \frac{\partial \varphi}{c \partial t} \right) = -\mathfrak{s}. \quad (21, 3)$$

Ähnlich folgt aus der zweiten der Gleichungen (20, 3)

$$\Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{c^2 \partial t^2} + \frac{\partial}{c \partial t} \left(\text{div } \mathfrak{A} + \frac{\partial \varphi}{c \partial t} \right) = -\varrho. \quad (21, 4)$$

Der Übergang zur 4-dimensionalen Schreibweise bietet keine Schwierigkeiten. Zunächst fassen wir das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ und das skalare Potential φ zu einem 4-dimensionalen Vektorpotential A_λ zusammen:

$$A_1 = A_x, \quad A_2 = A_y, \quad A_3 = A_z; \quad A_0 = i\varphi. \quad (21, 5)$$

Dann finden wir aus (20, 8) und (21, 1):

$$F_{12} = H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Daher ist nach (21, 5)

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}.$$

Ähnlich berechnen wir

$$F_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \quad F_{31} = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}.$$

Ferner finden wir aus (20, 8), (21, 2) und (21, 5):

$$F_{01} = iE_x = -i \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial A_x}{c \partial t} = \frac{\partial A_1}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial x_1}.$$

Und in ähnlicher Weise

$$F_{02} = \frac{\partial A_2}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial x_2}, \quad F_{03} = \frac{\partial A_3}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial x_3}.$$

Die elektromagnetische Feldstärke $F_{\lambda\mu}$ hängt also mit dem Vektorpotential A_λ durch die tensorielle Operation (19, 4) zusammen:

$$F_{\lambda\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}. \quad (21, 6)$$

Führt man die Beziehung (21, 6) in die zweite 4-dimensionale MAXWELLSche Gleichung (20, 11) ein, so findet man, daß die dadurch entstehenden sechs Terme auf der linken Seite von (20, 11) sich gegenseitig aufheben; daher ist Gleichung (20, 11) automatisch erfüllt. Dies war auch zu erwarten, da Gleichung (21, 6) mit (21, 1), (21, 2) gleichwertig ist. Diese letzten Gleichungen wurden aber aus (20, 4) abgeleitet, die ihrerseits mit (20, 11) äquivalent ist. In der 4-dimensionalen Sprache kann man sagen: die Beziehung (20, 11) liefert die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich der antisymmetrische Tensor $F_{\lambda\mu}$ aus einem Vektor A_λ nach (21, 6) ableiten läßt.

Setzt man dagegen (21, 6) in die erste 4-dimensionale MAXWELLSche Gleichung (20, 10) ein, so findet man die 4-dimensionale Form der Gleichungen (21, 3) und (21, 4):

$$\sum_\varrho \frac{\partial}{\partial x_\varrho} \left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\varrho} \right) = s_\lambda.$$

Diese Gleichung nimmt bei Verwendung des D'ALEMBERT-Operators (19, 11) folgende Form an:

$$\square A_\lambda - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \sum_q \frac{\partial A_q}{\partial x_q} = -s_\lambda. \quad (21, 7)$$

Man bemerke nun, daß das einem gegebenen elektromagnetischen Feld $F_{\lambda\mu}$ entsprechende Potential A_λ nicht eindeutig definiert ist. Nimmt man nämlich ein willkürliches skalares Feld ω und addiert zu A_λ den Gradienten von ω ,

$$A_\lambda^* = A_\lambda + \frac{\partial \omega}{\partial x_\lambda}, \quad (21, 8)$$

so liefert A_λ^* als Vektorpotential in (21, 6) eingesetzt das gleiche Feld $F_{\lambda\mu}$ wie A_λ . Mit anderen Worten: neben A_λ befriedigt auch A_λ^* die Feldgleichung (21, 7) mit dem gleichen Vektor s_λ . Dementsprechend darf man bei der Behandlung von konkreten Problemen das Vektorpotential durch eine zusätzliche Bedingung einschränken. Gleichung (21, 7) zeigt, daß für diesen Zweck folgende Bedingung — die sogenannte LORENTZ-Konvention — sich besonders gut eignet:

$$\sum_q \frac{\partial A_q}{\partial x_q} = 0. \quad (21, 9)$$

Dann reduziert sich nämlich die Feldgleichung (21, 7) auf die einfache Form

$$\square A_\lambda = -s_\lambda. \quad (21, 10)$$

Wendet man den Divergenzoperator auf die Vektorgleichung (21, 7) an, so ergibt sich

$$\sum_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \square A_\lambda - \square \sum_q \frac{\partial A_q}{\partial x_q} = - \sum_\lambda \frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\lambda}.$$

Die linke Seite ist aber identisch gleich Null, da man die Operatoren $\frac{\partial}{\partial x_\lambda}$ und $\square$ vertauschen darf und im zweiten Term λ statt q schreiben kann. Es gilt also

$$\sum_\lambda \frac{\partial s_\lambda}{\partial x_\lambda} = 0. \quad (21, 11)$$

Diese Beziehung stellt die 4-dimensionale Form der Kontinuitätsgleichung (20, 6) dar und bringt daher den Erhaltungssatz für die Gesamtladung des Feldes zum Ausdruck.

§ 22. Transformationsformeln für $F_{\lambda\mu}$, s_λ und A_λ

Geht man von einem Koordinatensystem x_μ zu einem anderen x'_μ durch die allgemeine LORENTZ-Transformation (9, 5) über, so transformieren sich dabei die Komponenten der elektromagnetischen Feldstärke $F_{\lambda\mu}$ nach der Formel (18, 6):

$$F'_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho\sigma} a_{\lambda\varrho} a_{\mu\sigma} F_{\varrho\sigma}. \quad (22, 1)$$

Für die Komponenten der Stromladungsdichte s_λ und des elektromagnetischen Potentials A_λ gilt dagegen die Formel (18, 5):

$$s'_\lambda = \sum_{\varrho} a_{\lambda\varrho} s_\varrho, \quad (22, 2)$$

$$A'_\lambda = \sum_{\varrho} a_{\lambda\varrho} A_\varrho. \quad (22, 3)$$

Wir wollen diese Formeln für die spezielle LORENTZ-Transformation (4, 12) mit der Matrix (9, 10),

$$a_{\lambda\varrho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}, \quad (22, 4)$$

explizite ausrechnen, da die dadurch entstehenden Beziehungen für die Anwendungen von Wichtigkeit sind.

Wir geben die ausführliche Rechnung für F'_{12} wieder,

$$F'_{12} = \sum_{\varrho\sigma} a_{1\varrho} a_{2\sigma} F_{\varrho\sigma}.$$

Die Summation über σ reduziert sich nach (22, 4) auf einen einzigen Term ($\sigma = 2$, $a_{22} = 1$):

$$F'_{12} = \sum_{\varrho} a_{1\varrho} F_{\varrho 2}.$$

Die Summation über ϱ ergibt zwei nicht verschwindende Terme (für $\varrho = 1$ und 0):

$$F'_{12} = a_{11} F_{12} + a_{10} F_{02} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (F_{12} + i\beta F_{02}).$$

Ähnlich lassen sich auch die anderen Komponenten berechnen. Das Gesamtergebnis lautet

$$\left. \begin{aligned} F'_{23} &= F_{23}, & F'_{31} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (F_{31} + i\beta F_{30}), \\ & & F'_{12} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (F_{12} + i\beta F_{02}); \\ F'_{10} &= F_{10}, & F'_{20} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (F_{20} + i\beta F_{12}), \\ & & F'_{30} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (F_{30} - i\beta F_{31}). \end{aligned} \right\} (22, 5)$$

Aus diesen Formeln kann man mit Hilfe von (20, 8) zu den Komponenten der 3-dimensionalen Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ zurückgehen. Man findet

$$\left. \begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_y - \beta H_z), & E'_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_z + \beta H_y); \\ H'_x &= H_x, & H'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (H_y + \beta E_z), & H'_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (H_z - \beta E_y). \end{aligned} \right\} (22, 6)$$

Die Beziehungen (22, 6) lassen zwei interessante Anwendungen zu. Berechnen wir nämlich daraus das 3-dimensionale skalare Produkt $(\mathfrak{E}' \mathfrak{H}') = E'_x H'_x + E'_y H'_y + E'_z H'_z$, so finden wir nach einer elementaren Rechnung

$$(\mathfrak{E}' \mathfrak{H}') = (\mathfrak{E} \mathfrak{H}). \quad (22, 7)$$

Ähnlich finden wir für den Ausdruck $E'^2 - H'^2 = (E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2) - (H_x'^2 + H_y'^2 + H_z'^2)$,

$$E'^2 - H'^2 = E^2 - H^2. \quad (22, 8)$$

Andererseits verhalten sich die Größen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ bei dreidimensionalen Drehungen wie Vektoren des 3-dimensionalen Raumes. Bei solchen Drehungen bleiben also sowohl das skalare Produkt $(\mathfrak{E} \mathfrak{H})$, als auch die Quadrate E^2 und H^2 , und daher auch $E^2 - H^2$ invariant. Berücksichtigt man dann noch, daß durch Überlagerung von speziellen LORENTZ-Transformationen der Art (4, 12) und 3-dimensionalen Drehungen die allgemeine LORENTZ-Transformation hervorgeht, so folgt, daß die Größen $(\mathfrak{E} \mathfrak{H})$ und $E^2 - H^2$ auch gegen die allgemeine LORENTZ-Transformation invariant sind.

Die Transformationsformel (22, 2) für die Strom-Ladungsdichte ergibt bei der durch (22, 4) beschriebenen LORENTZ-Transformation

$$s'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (s_1 + i\beta s_0), \quad s'_2 = s_2, \quad s'_3 = s_3, \quad s'_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (s_0 - i\beta s_1).$$

Oder, wenn wir mit Hilfe von (20, 9) zur 3-dimensionalen Stromdichte $\mathbf{s}$ und der Ladungsdichte ϱ zurückgehen,

$$\left. \begin{aligned} s'_x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (s_x - \beta \varrho), & s'_y &= s_y, & s'_z &= s_z; \\ \varrho' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\varrho - \beta s_x). \end{aligned} \right\} \quad (22, 9)$$

Ähnlich findet man aus (22, 3) und (22, 4) für die Transformation des 4-dimensionalen Potentials

$$\begin{aligned} A'_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (A_1 + i\beta A_0), & A'_2 &= A_2, & A'_3 &= A_3; \\ A'_0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (A_0 - i\beta A_1). \end{aligned}$$

Und wenn man (21, 5) berücksichtigt:

$$\left. \begin{aligned} A'_x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (A_x - \beta \varphi), & A'_y &= A_y, & A'_z &= A_z; \\ \varphi' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\varphi - \beta A_x). \end{aligned} \right\} \quad (22, 10)$$

§ 23. Das Feld eines geladenen Teilchens

Das Inertialsystem x_μ sei das Ruhssystem eines Teilchens, das die elektrische Ladung e trägt. Sein Ort sei als der Ursprung des räumlichen Koordinatensystems gewählt, d. h. das Teilchen befinde sich dauernd am Punkt $x=y=z=0$. Das Potential A_λ des von diesem Teilchen erzeugten elektromagnetischen Feldes läßt sich unmittelbar, z. B. aus (21, 10), berechnen. Bemerkt man nämlich, daß das Feld unabhängig von der Zeit, d. h. statisch sein wird, so reduziert sich nach (19, 11) der d'ALEMBERTSche Operator auf den LAPLACESchen, und die Gleichungen (21, 10) nehmen die Form

$$\Delta A_\lambda = -s_\lambda$$

an. Ferner sind im vorliegenden Fall die Komponenten s_k ($k=1, 2, 3$) gleich Null und nur $s_0 = i\varrho$ im Inneren des Teilchens von Null verschieden. Folglich wird

$$A_k = 0 \quad (k=1, 2, 3), \quad A_0 = \frac{ie}{4\pi r}. \quad (23, 1)$$

Dabei bedeutet r die Entfernung des Aufpunktes (x, y, z) vom Ort des Teilchens:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (23, 2)$$

Gehen wir zur 3-dimensionalen Schreibweise zurück, so folgt aus (21, 5)

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \varphi = \frac{e}{4\pi r}. \quad (23, 3)$$

Die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ lassen sich aus (21, 1) und (21, 2) berechnen:

$$\mathfrak{E} = \frac{e\mathbf{r}}{4\pi r^3}, \quad \mathfrak{H} = 0. \quad (23, 4)$$

Dabei ist $\mathbf{r}$ der vom Ort der Ladung zum betrachteten Aufpunkt führende Vektor mit den Komponenten x, y, z .

Wir gehen nun zu einem anderen Koordinatensystem x'_μ mit Hilfe der speziellen LORENTZ-Transformation (4, 12) über. In x'_μ bewegt sich das Teilchen parallel zur x' -Achse mit der konstanten Geschwindigkeit $q = -v$. Das von dieser gleichmäßig bewegten Ladung erzeugte elektromagnetische Feld wird am einfachsten in der Weise ermittelt, daß man von dem durch (23, 3) und (23, 4) im Ruhssystem x_μ gegebenen Feld ausgeht und es mit Hilfe der Formeln (22, 10) und (22, 6) auf das Koordinatensystem x'_μ transformiert. Das Ergebnis lautet:

$$A'_x = -\frac{e\beta}{4\pi r\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A'_y = A'_z = 0, \quad \varphi' = \frac{e}{4\pi r\sqrt{1-\beta^2}}; \quad (23, 5)$$

$$\left. \begin{aligned} E'_x &= \frac{ex}{4\pi r^3}, & E'_y &= \frac{ey}{4\pi r^3\sqrt{1-\beta^2}}, & E'_z &= \frac{ez}{4\pi r^3\sqrt{1-\beta^2}}; \\ H'_x &= 0, & H'_y &= \frac{\beta ez}{4\pi r^3\sqrt{1-\beta^2}}, & H'_z &= \frac{-\beta ey}{4\pi r^3\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (23, 6)$$

Diese Formeln sind aber insofern noch unbequem, als sie die Feldgrößen im neuen Koordinatensystem x'_μ als Funktionen der alten Koordinaten x_μ ausdrücken. Der Übergang zu den neuen Koordinaten läßt sich unmittelbar mit Hilfe der zu (4, 12) reziproken Transformation (4, 14) ausführen,

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (23, 7)$$

Daraus folgt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{(x' + vt')^2}{1-\beta^2} + y'^2 + z'^2}. \quad (23, 8)$$

Setzt man den Wert (23, 8) in (23, 5) ein und bemerkt, daß $q = -v$ und daher $\beta = -\frac{q}{c}$ ist, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{eq}{4\pi c \sqrt{(x' - qt')^2 + (y'^2 + z'^2)(1 - \beta^2)}}, & A_y' = A_z' &= 0, \\ \varphi &= \frac{e}{4\pi \sqrt{(x' - qt')^2 + (y'^2 + z'^2)(1 - \beta^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (23, 9)$$

Ähnlich findet man aus (23, 6) mit Hilfe von (23, 7) und (23, 8) die endgültigen Ausdrücke für die Komponenten von $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$. Diese Komponenten hätten wir selbstverständlich auch aus (23, 9) mit Hilfe von (21, 1) und (21, 2) berechnen können.

Das Ergebnis (23, 9) kann man natürlich auch durch unmittelbare Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen im Koordinatensystem x'_μ gewinnen. Die für die Physik am meisten interessierende Lösung dieser Gleichungen ist durch die Formel der retardierten Potentiale gegeben. Im Falle eines beliebig bewegten geladenen Teilchens, wobei also die Stromdichte durch (20, 5) gegeben wird, lautet diese Formel

$$\mathfrak{A} = \frac{e}{4\pi c} \left[\frac{q}{R \left(1 - \frac{q_R}{c} \right)} \right]_{\text{ret}}, \quad \varphi = \frac{e}{4\pi} \left[\frac{1}{R \left(1 - \frac{q_R}{c} \right)} \right]_{\text{ret}} \quad (23, 10)$$

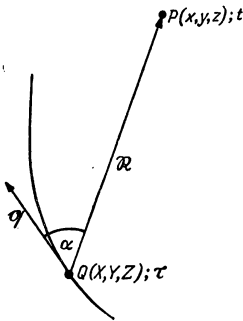


Fig. 8

Dabei ist e die Gesamtladung des Teilchens, während der Index „ret“ bedeutet, daß sich die in den Klammern stehenden Größen auf die dem 4-dimensionalen Aufpunkt $(x, y, z; t)$ entsprechende *retardierte* Lage Q des Teilchens beziehen (Fig. 8). q ist also die Geschwindigkeit des Teilchens an der Stelle Q , R die 3-dimensionale Entfernung der Punkte Q und P ,

$$R = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2}, \quad (23, 11)$$

und q_R die Projektion von q in die Richtung des von Q nach P führenden Vektors $\mathfrak{R}$:

$$q_R = q \cos \alpha \quad \text{oder} \quad R q_R = (\mathfrak{R} q). \quad (23, 12)$$

Die genaue Definition der retardierten Lage Q besteht darin, daß das bewegte Teilchen sich dort an demjenigen Zeitpunkt τ befindet, der die Beziehung

$$\tau = t - \frac{R}{c} \quad (23, 13)$$

erfüllt. Der Wert von τ läßt sich aus (23, 13) und (23, 11) bestimmen, wenn die Bewegung des Teilchens bekannt ist, wenn also die Teilchenkoordinaten X, Y, Z bekannte Funktionen von τ sind. Die Gleichung

$$\tau = t - \frac{1}{c} \sqrt{(X(\tau) - x)^2 + (Y(\tau) - y)^2 + (Z(\tau) - z)^2}$$

enthält nämlich dann neben x, y, z und t nur noch τ , so daß man daraus τ als Funktion von x, y, z und t bestimmen kann.

Kehren wir zu dem im Koordinatensystem x'_μ mit der konstanten Geschwindigkeit $q = -v$ parallel zur x' -Achse bewegten Teilchen zurück, so ist seine Bewegung durch die Beziehungen

$$X' = q\tau', \quad Y' = Z' = 0$$

bestimmt. Es folgt dann aus (23, 11):

$$R'^2 = (q\tau' - x')^2 + y'^2 + z'^2.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung τ' mit Hilfe der Beziehung (23, 13) durch

$$\tau' = t' - \frac{R'}{c}, \quad (23, 14)$$

so ergibt sich daraus eine quadratische Gleichung für R' :

$$(1 - \beta^2) R'^2 + 2\beta(x' - qt')R' - [(x' - qt')^2 + y'^2 + z'^2] = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung liefert

$$(1 - \beta^2) R' = -\beta(x' - qt') + \sqrt{(x' - qt')^2 + (y'^2 + z'^2)(1 - \beta^2)}. \quad (23, 15)$$

In dieser Beziehung haben wir die Wurzel nur mit dem positiven Vorzeichen genommen, weil das negative Vorzeichen zu $R' < 0$ führt. Berechnen wir noch $\frac{R'}{c} q_{R'}$ aus (23, 12),

$$\frac{1}{c} R' q_{R'} = \frac{1}{c} (\Re' q) = \frac{q}{c} (x' - q\tau'),$$

also wegen (23, 14)

$$\frac{1}{c} R' q_{R'} = \frac{q}{c} (x' - qt') + \frac{q^2}{c^2} R',$$

so folgt

$$R' \left(1 - \frac{1}{c} q_{R'} \right) = (1 - \beta^2) R' - \frac{q}{c} (x' - qt').$$

Also nach (23, 15), wenn man beachtet, daß $\beta = -\frac{q}{c}$ ist,

$$R' \left(1 - \frac{1}{c} q_{R'} \right) = \sqrt{(x' - qt')^2 + (y'^2 + z'^2) (1 - \beta^2)}.$$

Damit wird aber die Beziehung (23, 10) mit (23, 9) identisch. Es sei noch bemerkt, daß im Ruhssystem x_μ das Feld (23, 3) offenbar sowohl als das retardierte, wie auch als das avancierte Feld betrachtet werden kann. Demgemäß sollte man auch das Feld (23, 9) im Koordinatensystem x'_μ nicht nur aus den Formeln (23, 10) für die retardierten, sondern auch aus denjenigen für die avancierten Potentiale ableiten können. Die Richtigkeit dieser Bemerkung kann man leicht durch unmittelbare Rechnung bestätigen. Dabei muß man berücksichtigen, daß für die avancierten Potentiale die Beziehung (23, 13) durch

$$\tau = t + \frac{R}{c}$$

und der Faktor $1 - \frac{q_R}{c}$ im Nenner von (23, 10) durch $1 + \frac{q_R}{c}$ zu ersetzen ist.

Selbstverständlich gilt die Identität von retardierten und avancierten Potentialen nur bei der gleichförmigen Bewegung des geladenen Teilchens.

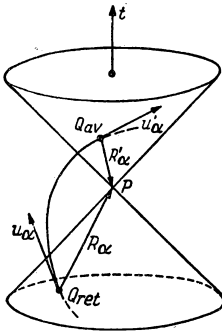


Fig. 9

Wir wollen noch die Ausdrücke für die retardierten und die avancierten Potentiale in 4-dimensionaler Form schreiben. Dazu bemerken wir zunächst, daß die dem 4-dimensionalen Aufpunkt P entsprechende retardierte Lage des Teilchens durch den Schnittpunkt Q_{ret} des negativen Lichtkegels von P (vgl. § 8) mit der die Bewegung des Teilchens darstellenden Weltlinie gegeben wird (Fig. 9). Durch die Punkte Q_{ret} und P läßt sich nun ein 4-dimensionaler Vektor R_4 definieren, dessen drei erste Komponenten mit denjenigen des 3-dimensionalen Vektors $\mathfrak{R}$ der Fig. 8 identisch sind. Die vierte Komponente R_4 bestimmt man aus der Beziehung, welche das Verschwinden der 4-dimensionalen Länge von R_4 ausdrückt (weil R_4 auf dem Lichtkegel liegt):

$$(R_4)^2 = R^2.$$

Beachtet man noch, daß nach der Fig. 9 $R_4 > 0$ sein muß, so folgt

$$R_4 = R.$$

Die 4-dimensionale Form der Beziehungen (23, 10) lautet nun

$$A_1 = -\frac{e}{4\pi} \frac{u_1}{\sum_e u_e R_e}, \quad (23, 16)$$

wobei u_λ die Geschwindigkeit des Teilchens an der Stelle Q_{ret} bedeutet. Berechnet man nämlich die Summe $\sum_e u_e R_e$ unter Verwendung der Werte (10, 6) von u_e ,

$$\sum_e u_e R_e = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} [(\Re q) - cR],$$

so folgt daraus unmittelbar die Äquivalenz von (23, 10) und (23, 16). Für das avancierte Potential wird der Schnittpunkt Q_{av} der Weltlinie des Teilchens mit dem vorderen Lichtkegel des Aufpunktes P verwendet. Bezeichnet man den von Q_{av} nach P führenden Vierervektor mit R_λ^* und die Geschwindigkeit des Teilchens an der Stelle Q_{av} mit u_λ^* , so überzeugt man sich durch Berechnung von $\sum_e u_e^* R_e^*$, daß das avancierte Potential durch die Formel

$$A_\lambda^* = \frac{e}{4\pi} \frac{u_\lambda^*}{\sum_e u_e^* R_e^*} \quad (23, 17)$$

gegeben wird.

§ 24. DOPPLER-Effekt und Aberration

Wir betrachten eine ebene, linear polarisierte elektromagnetische Welle, die sich im Vakuum fortpflanzt. In 3-dimensionaler Schreibweise müssen wir von folgendem Ansatz ausgehen:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin \omega, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \sin \omega. \quad (24, 1)$$

$\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ sind zwei konstante Amplitudenvektoren, während die Phase ω linear in x, y, z und t ist:

$$\omega = 2\pi \left(\frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{\lambda} - \nu t \right). \quad (24, 2)$$

Dabei sind ξ, η, ζ die Komponenten der in die Fortpflanzungsrichtung weisenden Wellennormale $\mathbf{n}$, während λ die Wellenlänge und ν die Frequenz der Welle bedeuten. Geht man mit dem Ansatz (24, 1) und (24, 2) in die MAXWELLSchen Gleichungen (20, 3) und (20, 4) ein, so ergeben sich die Bedingungen¹⁾

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{E}_0 \mathbf{n}) = (\mathfrak{H}_0 \mathbf{n}) = 0, \\ \frac{1}{\lambda} [\mathbf{n} \mathfrak{H}_0] = -\frac{\nu}{c} \mathfrak{E}_0, \quad \frac{1}{\lambda} [\mathbf{n} \mathfrak{E}_0] = \frac{\nu}{c} \mathfrak{H}_0. \end{aligned} \right\} \quad (24, 3)$$

Diese Bedingungen bedeuten zunächst, daß die drei Vektoren $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{H}_0$ und $\mathbf{n}$ ein rechtwinkliges System mit positivem Drehsinn bilden. Ferner gilt $|\mathfrak{E}_0| = |\mathfrak{H}_0|$ und

$$\nu \lambda = c. \quad (24, 4)$$

¹⁾ Es bedeutet, wie üblich, $(\mathfrak{A} \mathfrak{B})$ das skalare und $[\mathfrak{A} \mathfrak{B}]$ das vektorielle Produkt.

Die letzte Beziehung drückt die Tatsache aus, daß sich die Welle mit der Geschwindigkeit c fortpflanzt.

Gehen wir zur 4-dimensionalen Schreibweise über, so folgt aus (20, 8) und (24, 1), daß alle Komponenten $F_{\lambda\mu}$ von der Form

$$F_{\lambda\mu} = (\text{konstante Amplitude}) \cdot \sin \omega \quad (24, 5)$$

sein werden. Die gemeinsame Phase ω , die nach (24, 2) linear in den vier Koordinaten ist, kann man folgendermaßen schreiben:

$$\omega = \sum_{\varrho} b_{\varrho} x_{\varrho}. \quad (24, 6)$$

Der Vergleich von (24, 2) und (24, 6) ergibt für die Koeffizienten b_{ϱ} die Werte

$$b_1 = \frac{2\pi\xi}{\lambda}, \quad b_2 = \frac{2\pi\eta}{\lambda}, \quad b_3 = \frac{2\pi\zeta}{\lambda}, \quad b_0 = i \frac{2\pi\nu}{c}. \quad (24, 7)$$

Führen wir nun die allgemeine LORENTZ-Transformation (9, 5) aus, so folgt aus (22, 1) und (24, 5), daß die neuen Komponenten $F'_{\lambda\mu}$ der elektromagnetischen Feldstärke wieder von der Form (24, 5) sind:

$$F'_{\lambda\mu} = (\text{neue konstante Amplitude}) \cdot \sin \omega,$$

wobei die Phase ω dieselbe wie in (24, 5) ist. Die Phase bleibt also bei LORENTZ-Transformationen invariant. Im Koordinatensystem x'_{μ} ist es aber angemessen, die Phase ω als Funktion der neuen Koordinaten zu schreiben. Dies läßt sich unmittelbar mit Hilfe der reziproken LORENTZ-Transformation (9, 8) erreichen:

$$x_{\varrho} = \sum_{\mu} a_{\mu\varrho} x'_{\mu}.$$

Es ergibt sich

$$\omega = \sum_{\varrho} b_{\varrho} \sum_{\mu} a_{\mu\varrho} x'_{\mu} = \sum_{\mu} \left(\sum_{\varrho} a_{\mu\varrho} b_{\varrho} \right) x'_{\mu}.$$

Setzen wir also

$$b'_{\mu} = \sum_{\varrho} a_{\mu\varrho} b_{\varrho}, \quad (24, 8)$$

so wird

$$\omega = \sum_{\varrho} b_{\varrho} x_{\varrho} = \sum_{\varrho} b'_{\varrho} x'_{\varrho}. \quad (24, 9)$$

Die Beziehung (24, 8) ist mit der Transformationsformel (18, 5) für die Komponenten eines Vektors identisch. Danach bilden die vier Koeffizienten b_{ϱ} die Komponenten eines Vierervektors. Wir nennen diesen Vektor den (4-dimensionalen) Ausbreitungsvektor der Welle. Wir berechnen den Betrag dieses

Vektors mit Hilfe der durch (24, 7) gegebenen Werte seiner Komponenten in x_μ :

$$\sum_e b_e b_e = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2.$$

Beachten wir, daß die Wellennormale $\mathbf{n}$ ein Einheitsvektor ist, also $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, so folgt

$$\sum_e b_e b_e = 4\pi^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\nu^2}{c^2} \right).$$

Also wegen (24, 4)

$$\sum_e b_e b_e = 0. \quad (24, 10)$$

Der Ausbreitungsvektor einer sich mit der Geschwindigkeit c fortpflanzenden Welle ist also, nach der Definition des § 8, ein Nullvektor des MINKOWSKI-schen Raumes.

Aus der Transformationsformel (24, 8) für den Ausbreitungsvektor b_e ergeben sich zwei wichtige Formeln, die wir jetzt ableiten wollen. Wir betrachten eine Welle, die sich im Koordinatensystem x_μ parallel der xy -Ebene ausbreitet und deren Wellennormale gegen die x -Achse um den Winkel Θ geneigt ist. Der Ausbreitungsvektor b_e hat also nach (24, 7) die Komponenten

$$b_e = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cos \Theta, \quad \frac{2\pi}{\lambda} \sin \Theta, \quad 0, \quad i \frac{2\pi\nu}{c} \right). \quad (24, 11)$$

Führen wir nun die spezielle LORENTZ-Transformation (4, 12) aus, so ergeben sich für die Komponenten des Ausbreitungsvektors im neuen Koordinatensystem x'_μ aus (24, 8) und (9, 10) die Werte

$$b'_e = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\cos \Theta - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \frac{2\pi}{\lambda} \sin \Theta, \quad 0, \quad i \frac{2\pi\nu}{c} \frac{1 - \beta \cos \Theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right). \quad (24, 12)$$

Die Welle breitet sich also auch im neuen Koordinatensystem parallel der $x'y'$ -Ebene aus, jedoch mit einem anderen Winkel Θ' und mit veränderter Wellenlänge λ' und Frequenz ν' . Setzen wir entsprechend (24, 11)

$$b'_e = \left(\frac{2\pi}{\lambda'} \cos \Theta', \quad \frac{2\pi}{\lambda'} \sin \Theta', \quad 0, \quad i \frac{2\pi\nu'}{c} \right), \quad (24, 13)$$

so liefert der Vergleich von (24, 12) und (24, 13)

$$\frac{\cos \Theta'}{\lambda'} = \frac{\cos \Theta - \beta}{\lambda \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \frac{\sin \Theta'}{\lambda'} = \frac{\sin \Theta}{\lambda}; \quad (24, 14)$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \beta \cos \Theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (24, 15)$$

Wir wollen jetzt annehmen, das ursprüngliche Koordinatensystem x_μ sei das Ruhssystem der Lichtquelle, welche die betrachtete Welle emittiert. Die Differenz $\nu' - \nu$ ist dann die Änderung der Frequenz infolge der relativen Bewegung zwischen einem im Koordinatensystem x'_μ messenden Beobachter und der die Strahlung emittierenden Lichtquelle. Formel (24, 15) bringt also den relativistisch berechneten DOPPLER-Effekt zum Ausdruck. Diese Formel ist aber deshalb für die Anwendungen unbequem, weil sie die für den in x'_μ messenden Beobachter gültige Frequenz ν' als Funktion des in x_μ gemessenen Winkels Θ angibt. Wir müssen also zunächst Θ durch Θ' ausdrücken. Dies läßt sich am einfachsten erreichen, wenn man (24, 15) mit der ersten Gleichung (24, 14) kombiniert. Aus $\lambda\nu = \lambda'\nu'$ folgt nämlich

$$\cos \Theta - \beta = \cos \Theta' (1 - \beta \cos \Theta). \quad (24, 16)$$

Daraus findet man

$$\cos \Theta = \frac{\beta + \cos \Theta'}{1 + \beta \cos \Theta'}.$$

Und dies in (24, 15) eingesetzt liefert die endgültige relativistische Formel des DOPPLER-Effekts:

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \Theta'}. \quad (24, 17)$$

Das Charakteristische in dieser Formel ist der Faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$, der zur Folge hat, daß auch bei senkrechter Beobachtung eine Frequenzänderung eintritt:

$$\nu' = \nu \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{für } \Theta' = \frac{\pi}{2}. \quad (24, 18)$$

Dieser sogenannte quadratische DOPPLER-Effekt — weil er von β^2 abhängt — ist im wesentlichen eine Folge der in § 6 diskutierten Zeitdilatation. Es sei noch bemerkt, daß man den quadratischen DOPPLER-Effekt mit Hilfe von Strahlung, die von einem möglichst homogenen Kanalstrahlenbündel emittiert wurde, unmittelbar beobachten konnte. Man darf also diesen Effekt als eine weitere experimentelle Bestätigung der speziellen Relativitätstheorie ansehen.

Löst man (24, 16) nach Θ' auf, so wird durch die Beziehung

$$\cos \Theta' = \frac{\cos \Theta - \beta}{1 - \beta \cos \Theta} \quad (24, 19)$$

die Aberration des Lichtes beschrieben. Eine andere, mit (24, 19) gleichwertige, Formel erhält man durch Elimination von λ und λ' aus den zwei Gleichungen (24, 14):

$$\operatorname{tg} \Theta' = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta - \beta} \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (24, 20)$$

§ 25. Der 4-dimensionale Spannungstensor

Die Kraftwirkungen, die das elektromagnetische Feld auf materielle Träger von Ladung und Strom ausübt, sind durch folgende Formel bestimmt:

$$\mathfrak{f} = \frac{d\mathfrak{F}}{dV} = \varrho \mathfrak{E} + [\mathfrak{s} \mathfrak{H}]. \quad (25, 1)$$

$d\mathfrak{F}$ ist die Kraft, welche auf die im Volumen dV enthaltene Materie wirkt, so daß $\mathfrak{f}$ die elektromagnetische Kraftdichte darstellt. ϱ und $\mathfrak{s}$ sind die Ladungs- und Stromdichte an der betreffenden Stelle, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die an derselben Stelle herrschenden elektrische und magnetische Feldstärke. Formel (25, 1) läßt sich leicht zu einer 4-dimensionalen Gleichung verallgemeinern. Betrachten wir nämlich z. B. die x -Komponente von (25, 1),

$$f_x = \varrho E_x + s_y H_z - s_z H_y,$$

und ersetzen wir die in der rechten Seite auftretenden Größen durch die entsprechenden Komponenten von s_λ und $F_{\lambda\mu}$ gemäß (20, 8) und (20, 9), so ergibt sich

$$f_x = s_0 F_{10} + s_2 F_{12} + s_3 F_{13} = \sum_e s_e F_{1e}.$$

Danach sind die Komponenten von $\mathfrak{f}$ mit den drei ersten Komponenten des 4-dimensionalen Vektors

$$f_\lambda = \sum_e F_{\lambda e} s_e \quad (25, 2)$$

identisch. Für die vierte Komponente von (25, 2) findet man aus (20, 8) und (20, 9)

$$f_0 = F_{01} s_1 + F_{02} s_2 + F_{03} s_3 = i(\mathfrak{E} \mathfrak{s}). \quad (25, 3)$$

Sie ist also bis auf den Faktor $\frac{i}{c}$ mit der Arbeitsleistung des elektromagnetischen Feldes pro Volumeinheit des materiellen Trägers der elektrischen Ströme identisch.

Die durch (25, 1) gegebene elektromagnetische Kraftdichte wurde von MAXWELL auf ein System von Spannungen zurückgeführt. Der Begriff der Spannung ist zunächst in der Elastizitätstheorie entstanden. In der Sprache der Tensorrechnung handelt es sich um einen Tensor zweiter Stufe im gewöhnlichen (3-dimensionalen) Raum. Am einfachsten würden wir die Komponenten dieses Tensors mit p_{xx} , p_{xy} usw. bezeichnen. Es ist aber für die folgende Rechnung zweckmäßiger, wenn wir numerische Indizes entsprechend der Zuordnung $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ verwenden. Dabei werden wir jedesmal erwähnen müssen, daß die betreffenden Indizes nur die Werte 1, 2, 3 durchlaufen, um eine Verwechslung mit den 4-dimensionalen Tensoren zu

vermeiden. Wir werden also die Komponenten des Spannungstensors mit p_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) bezeichnen, oder ausführlich in Form einer Matrix

$$p_{ik} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

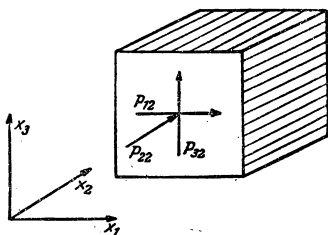


Fig. 10

Die physikalische Bedeutung von p_{ik} ist die folgende: p_{ik} gibt die zur x_i -Achse parallele Komponente derjenigen Kraft an, welche auf eine zur x_k -Achse senkrechte Flächeneinheit wirkt (vgl. Fig. 10). Man beweist in der Elastizitätstheorie und allgemeiner in der Mechanik des Kontinuums, daß der Tensor p_{ik} symmetrisch ist,

$$p_{ik} = p_{ki}, \quad (25, 4)$$

so daß er insgesamt sechs voneinander unabhängige Komponenten hat.

Betrachtet man nun ein Volumenelement dV und die mit Hilfe der Spannungen p_{ik} zu berechnenden, auf die Oberfläche von dV wirkenden Kräfte, so werden diese Kräfte im allgemeinen sich nicht genau das Gleichgewicht halten, sondern zu einer resultierenden Kraft $d\mathfrak{F}$ führen. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die entsprechende Kraftdichte

$$\mathfrak{f} = \frac{d\mathfrak{F}}{dV}$$

durch die Formel

$$f_i = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \quad (25, 5)$$

gegeben wird. Der MAXWELLSche Versuch, die elektromagnetische Kraftdichte (25, 1) auf ein System von Spannungen p_{ik} zurückzuführen, ist im Sinne der Formel (25, 5) aufzufassen.

Die von MAXWELL angegebenen Spannungen des elektromagnetischen Feldes sind die folgenden:

$$p_{ik} = \begin{pmatrix} -E_x^2 - H_x^2 + \frac{1}{2}(E^2 + H^2) & -E_x E_y - H_x H_y & -E_x E_z - H_x H_z \\ -E_y E_x - H_y H_x & -E_y^2 - H_y^2 + \frac{1}{2}(E^2 + H^2) & -E_y E_z - H_y H_z \\ -E_z E_x - H_z H_x & -E_z E_y - H_z H_y & -E_z^2 - H_z^2 + \frac{1}{2}(E^2 + H^2) \end{pmatrix}.$$

Berechnet man aber daraus die Ausdrücke $-\sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}$, so findet man unter Berücksichtigung der MAXWELLSchen Gleichungen (20, 3) und (20, 4), daß sie nicht genau gleich der Kraftdichte (25, 1) sind. Die Rechnung ergibt nämlich statt (25, 5) die Beziehungen

$$f_i + \frac{\partial g_i}{\partial t} = -\sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \quad (25, 7)$$

Dabei sind die drei Größen g_i die Komponenten des Vektors

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]. \quad (25, 8)$$

Wir werden die Beziehungen (25, 7) erst am Ende dieses Abschnittes, nach Einführung der 4-dimensionalen Formulierung, beweisen, da der Beweis sich dann bedeutend vereinfacht. Hier wollen wir die physikalische Bedeutung der Gleichungen (25, 7) diskutieren. Wir fangen mit einer neuen Deutung der Spannungskomponenten p_{ik} an. Beachten wir, daß nach der dynamischen Grundgleichung (13, 2) die Kraft $\mathfrak{F}$ als Impulsabgabe pro Zeiteinheit anzusehen ist, so liefert p_{ik} die Quantität des zur x_i -Achse parallelen Impulses, die in die Richtung der x_k -Achse pro Zeit- und Flächeneinheit fließt. Danach stellen die drei Größen p_{i1}, p_{i2}, p_{i3} eine spezielle Stromdichte dar, welche die Strömung des zur x_i -Achse parallelen Impulses beschreibt.

Nach dieser Deutung wird aber die Summe $\sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}$ nichts anderes als der

aus der Oberfläche der Volumeinheit pro Zeiteinheit herausströmende, zur x_i -Achse parallele Impuls. Andererseits stellt f_i die Zunahme in der Zeiteinheit des im Inneren der Volumeinheit enthaltenen Impulses in der betrachteten Richtung dar. Gleichung (25, 5) hat also genau die Form einer Kontinuitätsgleichung für die x_i -Komponente des Impulses und drückt daher die Impulserhaltung aus. Die Tatsache, daß in der Beziehung (25, 7) der zusätzliche Term $\frac{\partial g_i}{\partial t}$ auftritt, kann nur bedeuten, daß neben dem von der

Materie getragenen Impuls — dessen Änderung pro Zeiteinheit durch f ausgedrückt wird — noch der zusätzliche Impuls g_i enthalten sein muß. Da nach (25, 8) der Vektor $\mathbf{g}$ durch die elektromagnetischen Größen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ bestimmt wird, muß man ihn dem elektromagnetischen Feld zuordnen. Nach der MAXWELLSchen Theorie besitzt also das elektromagnetische Feld eine eigene Impulsverteilung von der Dichte $\mathbf{g}$. Die Gleichungen (25, 7) drücken dann wieder die Impulserhaltung aus.

Auch die Erhaltung der Energie läßt sich durch eine zu (25, 7) ähnlich gebaute Formel beschreiben. Diese lautet:

$$c(\mathfrak{E} \mathfrak{E}) + \operatorname{div} \mathfrak{S} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \quad (25, 9)$$

Dabei bedeutet der erste Term die vom elektromagnetischen Feld an die Materie abgegebene Arbeitsleistung. $\mathfrak{S}$ ist der sogenannte POYNTINGsche Vektor,

$$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E} \mathfrak{H}], \quad (25, 9)$$

der die Energieströmung im elektromagnetischen Feld beschreibt; $\operatorname{div} \mathfrak{S}$ ist also die in der Zeiteinheit durch die Oberfläche der Volumeinheit herausströmende Energie. Der letzte Term bedeutet, daß dem elektromagnetischen Feld auch eine Energieverteilung von der Dichte W zukommt. Die Ausrechnung der Beziehung (25, 9) mit Hilfe der MAXWELLSchen Gleichungen ergibt für W den Wert

$$W = \frac{1}{2} (E^2 + H^2). \quad (25, 11)$$

Der Beweis der Formel (25, 9) wird ebenfalls aus der später abzuleitenden 4-dimensionalen Gleichung (25, 20) folgen.

In der 3-dimensionalen Formulierung, die wir bisher behandelt haben, erscheint der Energiesatz (25, 9) vom Impulssatz (25, 7) völlig getrennt. In der 4-dimensionalen Formulierung aber, der wir uns jetzt zuwenden, werden diese zwei Erhaltungssätze eng miteinander zusammenhängen.

Wir führen den 4-dimensionalen Tensor

$$T_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho} F_{\lambda\varrho} F_{\mu\varrho} - \frac{1}{4} \delta_{\lambda\mu} \sum_{\varrho\sigma} F_{\varrho\sigma} F_{\sigma\varrho} \quad (25, 12)$$

ein. Die Tensoreigenschaft von $T_{\lambda\mu}$ folgt unmittelbar aus den Ausführungen des § 18: Der erste Term stellt das einmal kontrahierte Produkt zweier Tensoren dar und ist daher wieder ein Tensor. Im zweiten Term ist die Summe $\sum_{\varrho\sigma} F_{\varrho\sigma} F_{\sigma\varrho}$ eine skalare Größe und daher das Produkt mit dem durch (18, 17) definierten Tensor $\delta_{\lambda\mu}$ ebenfalls ein Tensor. Ferner sieht man unmittelbar, daß $T_{\lambda\mu}$ symmetrisch ist:

$$T_{\lambda\mu} = T_{\mu\lambda}. \quad (25, 13)$$

Schreiben wir nun ausführlich die Komponente T_{11} ,

$$\begin{aligned} T_{11} &= (F_{12})^2 + (F_{13})^2 + (F_{10})^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} [(F_{12})^2 + (F_{23})^2 + (F_{31})^2 + (F_{10})^2 + (F_{20})^2 + (F_{30})^2], \end{aligned}$$

und gehen dann mit Hilfe von (20, 8) zu den Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ über, so finden wir

$$T_{11} = -E_x^2 - H_x^2 + \frac{1}{2} (E^2 + H^2).$$

Also nach (25, 6)

$$T_{11} = \phi_{11}.$$

Ähnlich finden wir für die übrigen Komponenten $T_{\lambda\mu}$, bei denen kein Index gleich Null wird,

$$T_{\lambda\mu} = \phi_{\lambda\mu} \quad \text{für } \lambda, \mu = 1, 2, 3. \quad (25, 14)$$

$T_{\lambda\mu}$ stellt also die 4-dimensionale Erweiterung des MAXWELLSchen Spannungstensors dar. Für die übrigen Komponenten von $T_{\lambda\mu}$ ergeben sich die Beziehungen:

$$T_{k0} = i c g_k, \quad T_{0k} = \frac{i}{c} S_k \quad (k = 1, 2, 3); \quad (25, 15)$$

$$T_{00} = -W = i^2 W. \quad (25, 16)$$

Die durch (25, 13) verlangte Symmetriebeziehung $T_{k0} = T_{0k}$ folgt daraus, daß nach (25, 8) und (25, 10)

$$\mathfrak{S} = c^2 g \quad (25, 17)$$

gilt. Der in (25, 16) eingeführte Faktor i^2 soll andeuten, daß bei Verwendung der reellen Zeitkoordinate $x_4 = ct$ die an die Stelle von T_{00} tretende Komponente T_{44} gleich der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist:

$$T_{44} = W. \quad (25, 18)$$

Danach geben die zehn voneinander unabhängigen Komponenten von $T_{\lambda\mu}$ neben den MAXWELLSchen Spannungen noch die Komponenten der Impulsdichte g und die Energiedichte W des Feldes an.

Differentiation von (25, 12) und gleichzeitige Kontraktion liefert

$$\sum_{\mu} \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x_{\mu}} = \sum_{\varrho\mu} F_{\lambda\varrho} \frac{\partial F_{\mu\varrho}}{\partial x_{\mu}} + \sum_{\varrho\mu} \frac{\partial F_{\lambda\varrho}}{\partial x_{\mu}} F_{\mu\varrho} - \frac{1}{2} \sum_{\varrho\sigma} F_{\varrho\sigma} \frac{\partial F_{\varrho\sigma}}{\partial x_{\lambda}}. \quad (25, 19)$$

Dabei wurde die Summation über μ im dritten Term sofort ausgeführt. Beachtet man (20, 10) und (25, 2), so läßt sich der erste Term der rechten Seite von (25, 19) wie folgt umformen:

$$\sum_{\varrho\mu} F_{\lambda\varrho} \frac{\partial F_{\mu\varrho}}{\partial x_{\mu}} = - \sum_{\varrho} F_{\lambda\varrho} s_{\varrho} = -f_{\lambda}.$$

Der zweite Term ergibt mit Hilfe von (21, 6)

$$\sum_{\varrho\mu} \frac{\partial F_{\lambda\varrho}}{\partial x_\mu} F_{\mu\varrho} = \sum_{\varrho\mu} \left(\frac{\partial^2 A_\varrho}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\varrho \partial x_\mu} \right) F_{\mu\varrho}.$$

Vertauscht man die beiden Summationsindizes ϱ und μ , so folgt

$$\sum_{\varrho\mu} \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\varrho \partial x_\mu} F_{\mu\varrho} = \sum_{\varrho\mu} \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\mu \partial x_\varrho} F_{\varrho\mu}.$$

Wegen der Symmetrie der zweiten Ableitungen, $\frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\mu \partial x_\varrho} = \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\varrho \partial x_\mu}$, und wegen der Antisymmetrie von $F_{\mu\varrho}$ wird also:

$$\sum_{\varrho\mu} \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\varrho \partial x_\mu} F_{\mu\varrho} = - \sum_{\varrho\mu} \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\varrho \partial x_\mu} F_{\mu\varrho} = 0,$$

so daß sich der zweite Term von (25, 19) auf $\sum_{\varrho\mu} \frac{\partial^2 A_\varrho}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} F_{\mu\varrho}$ reduziert. Der

letzte Term von (25, 19) ergibt nach ähnlichen Umformungen

$$- \frac{1}{2} \sum_{\varrho\sigma} \left(\frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x_\varrho \partial x_\lambda} - \frac{\partial^2 A_\varrho}{\partial x_\sigma \partial x_\lambda} \right) F_{\varrho\sigma} = - \sum_{\varrho\sigma} \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x_\varrho \partial x_\lambda} F_{\varrho\sigma}$$

und hebt daher den zweiten Term auf. Gleichung (25, 19) wird also

$$\sum_\mu \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x_\mu} = - f_\lambda. \quad (25, 20)$$

Schreiben wir nun die zu $\lambda=1$ entsprechende Komponente von (25, 20),

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{1k}}{\partial x_k} + \frac{\partial T_{10}}{\partial x_0} = - f_1,$$

so ist diese Gleichung wegen (25, 14) und (25, 15) mit der ersten Komponente von (25, 7) identisch. Für $\lambda=2, 3$ ergeben sich die zwei anderen Komponenten von (25, 7). Für $\lambda=0$ dagegen ergibt sich aus (25, 20)

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{0k}}{\partial x_k} + \frac{\partial T_{00}}{\partial x_0} = - f_0,$$

was wegen (25, 15), (25, 16) und (25, 3) mit der Gleichung (25, 9) übereinstimmt. Danach sind die Erhaltungssätze von Impuls (25, 7) und Energie (25, 9) in der 4-dimensionalen Vektorgleichung (25, 20) vereinigt.

§ 26. Die Bewegung eines geladenen Teilchens

Wir betrachten ein geladenes Teilchen, das sich in einem elektromagnetischen Feld bewegt. Die Stromdichte ist dann durch die Formel (20, 5) gegeben:

$$\mathfrak{s} = \frac{q}{c} \mathfrak{q}.$$

Dementsprechend ergibt sich für die Kraftdichte (25, 1)

$$\mathfrak{f} = q \mathfrak{E} + \frac{q}{c} [\mathfrak{q} \mathfrak{H}]. \quad (26, 1)$$

Die auf das Teilchen wirkende elektromagnetische Gesamtkraft wird man aus (26, 1) durch Integration über das Volumen des Teilchens erhalten:

$$\mathfrak{F} = \int \mathfrak{f} dV = \int \left(q \mathfrak{E} + \frac{q}{c} [\mathfrak{q} \mathfrak{H}] \right) dV. \quad (26, 2)$$

Bedenkt man nun, daß die unter dem Integral auftretenden Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ einen Beitrag von dem betrachteten Teilchen selbst enthalten, so wird es klar, daß eine strenge Durchführung der Integration in (26, 2) im allgemeinen sehr schwierig sein wird. Nur wenn der Beitrag des Teilchens sehr klein im Vergleich zu dem Beitrag der anderen Quellen des Feldes ist, fällt diese Schwierigkeit weg. Wir sprechen dann von einem geladenen Probeteilchen, das sich in einem gegebenen elektromagnetischen Feld bewegt. Nehmen wir in diesem Fall noch an, daß

1. die Dimensionen des Teilchens so klein sind, daß die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ im ganzen Inneren des Teilchens praktisch dieselben Werte haben,
2. das Teilchen sich quasitranslatorisch bewegt, also $\mathfrak{q}$ für das ganze Teilchen praktisch denselben Wert hat.

Dann läßt sich die Integration in (26, 2) sofort ausführen. Das Ergebnis lautet

$$\mathfrak{F} = e \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{q} \mathfrak{H}] \right). \quad (26, 3)$$

Dabei bedeutet e die Gesamtladung des Teilchens,

$$e = \int q dV. \quad (26, 4)$$

Formel (26, 3) ist für eine ausgedehnte Klasse von physikalischen Problemen völlig ausreichend.

Die Kraft (26, 3) können wir nach § 15 zu einem 4-dimensionalen Vektor erweitern. Betrachten wir z. B. die x -Komponente von (26, 3), so folgt aus (15, 3)

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} F_x = \frac{e}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \left(E_x + \frac{q_y}{c} H_z - \frac{q_z}{c} H_y \right).$$

Gehen wir nun mit Hilfe von (20, 8) und (10, 6) zu den 4-dimensionalen Größen $F_{\lambda\mu}$ und u_λ über, so ergibt sich

$$K_1 = \frac{e}{c} (F_{10} u_0 + F_{12} u_2 + F_{13} u_3) = \frac{e}{c} \sum_{\varrho} F_{1\varrho} u_{\varrho}.$$

Die 4-dimensionale Kraft ist also durch folgende Formel gegeben:

$$K_\lambda = \frac{e}{c} \sum_{\varrho} F_{\lambda\varrho} u_{\varrho}. \quad (26, 5)$$

Multipliziert man K_λ skalar mit u_λ , so folgt aus (26, 5)

$$\sum_{\lambda} K_\lambda u_\lambda = \frac{e}{c} \sum_{\lambda\varrho} F_{\lambda\varrho} u_{\varrho} u_\lambda.$$

Vertauscht man die Summationsindizes miteinander und berücksichtigt die Antisymmetrie von $F_{\lambda\varrho}$, so wird

$$\sum_{\lambda} K_\lambda u_\lambda = \frac{e}{c} \sum_{\lambda\varrho} F_{\varrho\lambda} u_{\varrho} u_\lambda = - \sum_{\lambda} K_\lambda u_\lambda.$$

Daher ist

$$\sum_{\lambda} K_\lambda u_\lambda = 0. \quad (26, 6)$$

Wegen (15, 9) bleibt also die Ruhmasse m_0 des Teilchens während der Bewegung konstant:

$$\frac{dm_0}{dt} = 0. \quad (26, 7)$$

Physikalisch ist dieses Ergebnis unmittelbar verständlich, da wir es hier mit einem reinen Konvektionsstrom zu tun haben, bei welchem bekanntlich keine Wärmeentwicklung stattfindet. Aus (13, 2), (11, 9) und (26, 3) folgt die Bewegungsgleichung des Teilchens:

$$\frac{d}{dt} \left(m_0 \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \right) = e \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{q} \mathfrak{H}] \right). \quad (26, 8)$$

Man kann dafür wegen (26, 7) auch schreiben:

$$m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \right) = e \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{q} \mathfrak{H}] \right). \quad (26, 8a)$$

In 4-dimensionaler Form lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 u_\lambda) = \frac{e}{c} \sum_e F_{\lambda e} u_e. \quad (26, 9)$$

Wir wollen noch auf einen charakteristischen Unterschied im Verhalten der 3-dimensionalen Kraft $\mathfrak{F}$ und der entsprechenden Kraftdichte $\mathfrak{f}$ hinweisen. Die Komponenten von $\mathfrak{F}$ sind nicht unmittelbar den drei ersten Komponenten der 4-dimensionalen Kraft K_λ gleichzusetzen, sondern erst nach Multiplikation mit $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$. Dagegen sind die Komponenten der Kraft-

dichte $\mathfrak{f}$ mit den drei ersten Komponenten des Vierervektors f_λ identisch. Den Grund dafür kann man leicht einsehen, wenn man bemerkt, daß $\mathfrak{f} = \frac{d\mathfrak{F}}{dV}$ ist. Wie wir aber in § 5 gesehen haben, ist das Volumelement dV wegen der Längenkontraktion keine invariante Größe. Drücken wir dV mit Hilfe des invarianten Ruhvolumens dV_0 aus, so wird

$$\mathfrak{f} = \frac{d\mathfrak{F}}{dV_0} \cdot \frac{dV_0}{dV}. \quad (26, 10)$$

Es gilt aber nach (5, 6)

$$\frac{dV_0}{dV} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = \frac{dt}{d\tau}. \quad (26, 11)$$

Der Ausdruck (26, 10) von $\mathfrak{f}$ enthält also neben dem invarianten Nenner dV_0 gerade noch denjenigen Faktor, der nötig ist, um die Komponenten der Kraft $d\mathfrak{F}$ in die drei ersten Komponenten der entsprechenden 4-dimensionalen Kraft zu verwandeln.

Setzt man den Wert (26, 11) von $\frac{dV_0}{dV}$ in (26, 10) ein, so ergibt sich daraus nach Multiplikation mit dV_0

$$\mathfrak{f} dV_0 = \frac{dt}{d\tau} d\mathfrak{F}.$$

Die rechte Seite dieser Beziehung ist nach (15, 3) nichts anderes als der 3-dimensionale Vektor $d\mathfrak{R}$ mit den Komponenten dK_1, dK_2, dK_3 :

$$\mathfrak{f} dV_0 = d\mathfrak{R}.$$

Diese Gleichung läßt sich aber sofort 4-dimensional erweitern:

$$f_\lambda dV_0 = dK_\lambda \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3). \quad (26, 12)$$

Daraus folgt nach Integration über das Ruhvolumen des Teilchens

$$K_\lambda = \int f_\lambda dV_0. \quad (26, 13)$$

Kapitel IV

MECHANIK DES KONTINUUMS

§ 27. Problemstellung. Spannungen

In der makroskopischen Physik darf man bei den meisten Problemen die Materie als etwas kontinuierlich Verteiltes ansehen und dementsprechend von einem materiellen Kontinuum sprechen. Die spätere Entdeckung der atomistischen Struktur der Materie hat zwar gezeigt, daß es sich dabei um eine rein phänomenologische Beschreibung handelt. Dadurch wurde jedoch das Anwendungsgebiet der sich auf dieser Auffassung gründenden makroskopischen Mechanik des Kontinuums keineswegs eingeschränkt. Allerdings reichen bei allen diesen Anwendungen die NEWTONschen Bewegungsgleichungen des Kontinuums vollständig aus, da es sich dabei immer um ausgesprochen makroskopische Probleme handelt, bei denen nur Geschwindigkeiten vorkommen, die sehr klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c sind. Von diesem makroskopischen Standpunkt aus hat also die relativistische Verschärfung der Mechanik des Kontinuums nur rein theoretisches Interesse.

Eine zweite, wesentlich tiefer gehende Anwendung des Kontinuumbegriffs hat sich aus der Diskussion der MAXWELLSchen Theorie des elektromagnetischen Feldes ergeben. Wie wir in § 25 gesehen haben, folgt nämlich aus dieser Theorie, daß das elektromagnetische Feld eine eigene kontinuierliche Impuls- und Energieverteilung besitzt. Zwischen dem makroskopischen materiellen Kontinuum und diesem neuen Feldkontinuum besteht neben anderen auch der für unsere Betrachtungen besonders wichtige Unterschied, daß man im zweiten Fall mit den Prinzipien der NEWTONschen Mechanik nicht auskommen kann: Wie wir bereits mehrmals betont haben, kann man die MAXWELLSche Theorie nur im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie konsequent entwickeln. Es entsteht daher die Notwendigkeit, eine allgemeine relativistische Mechanik des Kontinuums zu formulieren. Und zwar wird man diese Formulierung so allgemein halten müssen, daß sie beide Fälle — das makroskopische materielle Kontinuum und das Feldkontinuum — umfaßt.

An dieser Stelle soll noch eine Bemerkung Platz finden, welche die große theoretische Bedeutung des Feldkontinuums deutlich zeigt. Es besteht nämlich die Hoffnung, daß es einmal gelingen wird, die „letzten“ Bausteine der Materie — die Elementarteilchen — mit Hilfe eines Feldkontinuums zu beschreiben und auf diese Weise die durch die Atomistik bedingte Einschränkung des makroskopischen materiellen Kontinuumbegriffs in einem gewissen Sinne wieder aufzuheben. Es handelt sich um die verschiedenen Versuche, die Struktur der Elementarteilchen mit feldtheoretischen Mitteln zu

erforschen. Zwar ist heute ganz klar, daß man dabei nicht mit rein klassischen Betrachtungen zum Ziele kommen kann, sondern daß man mindestens auch die Quantentheorie zu diesem Zwecke mit heranziehen muß. Auch sollte hier gesagt werden, daß man bisher keine endgültigen Erfolge in dieser Richtung aufzuweisen hat. Trotzdem bildet die klassische Feldtheorie, und daher auch der Begriff des Feldkontinuums, immer noch den Ausgangspunkt der meisten Betrachtungen, die sich mit dem Problem der Elementarteilchen befassen.

Die Methode, von der wir hier Gebrauch machen werden, um zu der Formulierung der relativistischen Mechanik des Kontinuums zu gelangen, wird im wesentlichen mit derjenigen identisch sein, die wir in § 11 für die Begründung der relativistischen Dynamik des Massenpunktes verwendet haben. Wir werden also zunächst die Newtonschen Bewegungsgleichungen des materiellen Kontinuums zusammenfassen und sie dann in einer Form schreiben, die einen möglichst einfachen Übergang zur speziellen Relativitätstheorie gestattet. Dabei müssen wir von der allgemeinsten Form eines materiellen Kontinuums ausgehen, da wir zu einer noch allgemeineren, auch das Feldkontinuum umfassenden Theorie gelangen wollen.

Wir legen also unseren Betrachtungen eine reale Flüssigkeit zugrunde, die von der idealen Flüssigkeit beliebig abweichen darf. Bekanntlich können in einer idealen Flüssigkeit keine Schubspannungen existieren, so daß in diesem Fall die Spannungen sich auf einen (skalaren) hydrostatischen Druck reduzieren lassen. In einer realen Flüssigkeit dagegen werden die Spannungen durch einen allgemeinen Tensor des 3-dimensionalen Raumes dargestellt. Irgendwelche Beziehungen zwischen den Spannungen und den Deformationen des Materials brauchen wir nicht zu berücksichtigen. Durch diese Beziehungen werden nämlich spezielle Eigenschaften des jeweils betrachteten materiellen Kontinuums beschrieben, während wir uns hier für die Aufstellung der allgemeinen Bewegungsgleichungen des Kontinuums interessieren.

Die Definition der Spannungen läßt sich am einfachsten im Falle eines ruhenden, durch die Einwirkung von äußeren Kräften in einem Spannungszustand versetzten materiellen Kontinuums durchführen. In diesem Fall werden wir den Spannungstensor mit σ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) bezeichnen. Die Bedeutung von σ_{ik} ist dieselbe wie die von p_{ik} in § 25: σ_{ik} ist die zur x_i -Achse parallele Komponente der Kraft, die auf die zur x_k -Achse senkrechte Flächeneinheit wirkt (vgl. Fig. 10). Für die folgenden Betrachtungen ist auch die zweite, ebenfalls in § 25 gegebene Deutung von σ_{ik} von Wichtigkeit, nämlich daß σ_{ik} die Komponente der Stromdichte des zur x_i -Achse parallelen Impulses in der Richtung der x_k -Achse darstellt. Aus der Forderung des Gleichgewichts aller Kräfte, welche auf die in einem beliebigen Volumelement dV enthaltene Materie wirken, folgt bekanntlich die Symmetrieeigenschaft des Spannungstensors σ_{ik} ,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \quad (27, 1)$$

Im Falle einer beliebig bewegten Flüssigkeit kann man zunächst Flächenelemente betrachten, die sich mit den unmittelbar benachbarten Teilchen der Flüssigkeit gemeinsam bewegen. Mit Hilfe dieser Flächenelemente lassen sich die eigentlichen, innerhalb der Flüssigkeit herrschenden Spannungen σ_{ik} genau wie vorher definieren. Andererseits kann man aber auch Flächenelemente betrachten, welche sich im zugrundegelegten Koordinatensystem in Ruhe befinden. Geht man dann von der zweiten Deutung der Spannungen σ_{ik} aus, so kann man neue Größen ϕ_{ik} definieren, welche die Impulsströmung durch diese ruhenden Flächenelemente beschreiben. Die Werte dieser verallgemeinerten Spannungen lassen sich unmittelbar mit Hilfe der Bemerkung ableiten, daß die Differenz $\phi_{ik} - \sigma_{ik}$ dadurch zustande kommt, daß durch die ruhenden Flächenelemente auch Materie strömt, die ihrerseits ebenfalls einen Impuls trägt. Betrachten wir eine zur x_k -Achse senkrechte (ruhende) Flächeneinheit, so ist das durch diese Fläche pro Zeiteinheit strömende Flüssigkeitsvolumen gleich der Komponente q_k des Geschwindigkeitsvektors q . Bezeichnen wir also die von der Materie getragene Impulsdichte mit g , so wird der wegen der Flüssigkeitsströmung durch die betrachtete Fläche zusätzlich hindurchgehende Impuls gleich gq_k . Seine zur x_i -Achse parallele Komponente ist also gleich $g_i q_k$, und daher wird

$$\phi_{ik} = \sigma_{ik} + g_i q_k \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (27, 2)$$

Die Impulsdichte g hängt in der NEWTONSchen Mechanik mit der Massendichte ρ der Flüssigkeit durch die Formel

$$g = \rho q \quad (27, 3)$$

zusammen. Aus (27, 3) und (27, 1) folgt, daß auch der verallgemeinerte Spannungstensor ϕ_{ix} symmetrisch ist:

$$\phi_{ik} = \phi_{ki}. \quad (27, 4)$$

In den folgenden Rechnungen werden wir nach Möglichkeit die Verwendung von (27, 3) vermeiden, da sich diese Beziehung nicht in die Relativitätstheorie übertragen läßt. Die Symmetrieeigenschaft (27, 4) werden wir dann besonders postulieren müssen.

§ 28. Die NEWTONSchen Bewegungsgleichungen

Die Grundgleichungen der NEWTONSchen Mechanik des Kontinuums sind nichts anderes als die Erhaltungssätze von Impuls und Masse, wenn man diese Sätze in differentieller Form schreibt. Die Impulserhaltung ergibt dabei die drei eigentlichen Bewegungsgleichungen. Die vierte fundamentale Beziehung ist die Kontinuitätsgleichung, welche die Erhaltung der Masse ausdrückt. Wir wollen hier die zu diesen vier Gleichungen führende Rechnung wiedergeben, da sie größtenteils auch in der relativistischen Mechanik des Kontinuums unverändert gilt.

Die Rechnung wird besonders einfach, wenn wir Flächen- und Volumenelemente betrachten, die sich gemeinsam mit der Materie bewegen. Wir denken

uns also ein bestimmtes Flüssigkeitselement und verfolgen es in seiner Bewegung. Zur Zeit t erfülle dieses Flüssigkeitselement das Volumelement δV . Bezeichnen wir dann mit g die Impulsdichte an der Stelle von δV , so ist der Impuls des betreffenden Materieelements

$$\delta p = g \delta V. \quad (28, 1)$$

Nach der dynamischen Grundgleichung (13, 2) wird nun $\frac{d}{dt}(\delta p)$ gleich der auf dieses Materieelement wirkenden Gesamtkraft $\delta \mathfrak{F}$:

$$\frac{d}{dt}(\delta p) = \delta \mathfrak{F}. \quad (28, 2)$$

Die Kraft $\delta \mathfrak{F}$ läßt sich allgemein in zwei Teile zerlegen. Der erste Teil rührt von denjenigen Wirkungen her, welche die umgebende Flüssigkeit auf das betrachtete Element ausübt. Es handelt sich also um die Resultierende der auf die Oberfläche von δV wirkenden, mit Hilfe der Spannungen σ_{ik} zu berechnenden Kräfte. Diese sind aber nach (25, 5) der Kraftdichte

$$f_i^* = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, 3)$$

äquivalent. Der erste Teil von $\delta \mathfrak{F}$ hat also die Komponenten

$$f_i^* \delta V = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta V.$$

Der zweite Teil von $\delta \mathfrak{F}$ soll Wirkungen beschreiben, die von anderen Körpern auf das Flüssigkeitselement ausgeübt werden, z. B. Gravitations- oder elektromagnetische Kräfte. Die entsprechende Kraftdichte werden wir mit f bezeichnen und vorläufig nicht weiter analysieren. Die Gesamtkraft $\delta \mathfrak{F}$ hat also die Komponenten

$$\delta F_i = \left(- \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i \right) \delta V.$$

Die Bewegungsgleichung (28, 2) nimmt dann die Form an

$$\frac{d}{dt}(g_i \delta V) = \left(- \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i \right) \delta V \quad (i = 1, 2, 3). \quad (28, 3)$$

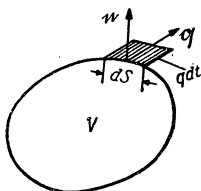
Die linke Seite von (28, 3) ergibt

$$\frac{d}{dt}(g_i \delta V) = \frac{dg_i}{dt} \delta V + g_i \frac{d}{dt}(\delta V), \quad (28, 4)$$

da sich beide Faktoren g_i und δV mit der Zeit ändern. Die Komponenten g_i der Impulsdichte sind als Funktionen der Raumkoordinaten x_i ($i = 1, 2, 3$) und der Zeit t anzusehen. Die Verwendung des totalen Differentialoperators $\frac{d}{dt}$ weist darauf hin, daß wir die Bewegung der Materie verfolgen. Da wir die Geschwindigkeit dieser Bewegung am Ort von δV mit q bezeichnet haben, wird die totale Ableitung $\frac{dg_i}{dt}$ folgenden Wert haben:

$$\begin{aligned}\frac{dg_i}{dt} &= \frac{\partial g_i}{\partial x} q_x + \frac{\partial g_i}{\partial y} q_y + \frac{\partial g_i}{\partial z} q_z + \frac{\partial g_i}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial x_k} q_k + \frac{\partial g_i}{\partial t}.\end{aligned}\quad (28, 5)$$

Den Wert von $\frac{d}{dt}(\delta V)$ kann man mit Hilfe der Fig. 11 berechnen. Betrachtet man nämlich ein beliebiges Volumen V , dessen Flächenelemente sich mit der an der betreffenden Stelle herrschenden Geschwindigkeit q bewegen, so liefert das in der Figur gezeigte Flächenelement dS im Zeitintervall dt eine Volumvergrößerung, welche gleich $ds(qn)dt$ ist. Daraus folgt



$$\frac{dV}{dt} = \int (qn) dS.$$

Oder, wenn man das Flächenintegral mit Hilfe des GAUSSschen Satzes in ein Volumintegral verwandelt,

Fig. 11

$$\frac{dV}{dt} = \int \operatorname{div} q dV. \quad (28, 6)$$

Hat man es nun mit einem sehr kleinen Volumen δV zu tun, so wird sich in seinem Innern der Wert von $\operatorname{div} q$ nicht merklich ändern und kann daher im Integral als ein konstanter Faktor behandelt werden. Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}(\delta V) = \operatorname{div} q \delta V. \quad (28, 7)$$

Führt man nun die Ausdrücke (28, 5) und (28, 7) in (28, 3) ein, so hebt sich der Faktor δV auf und es bleibt

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial x_k} q_k + \frac{\partial g_i}{\partial t} + g_i \operatorname{div} q = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i.$$

Die linke Seite läßt sich vereinfachen, wenn man bedenkt, daß

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial q_k}{\partial x_k}$$

bedeutet. Es folgt dann

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (g_i q_k) + \frac{\partial g_i}{\partial t} = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i.$$

Oder, wenn man die Summe der rechten Seite mit der der linken Seite zusammenfaßt,

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (g_i q_k + \sigma_{ik}) + \frac{\partial g_i}{\partial t} = f_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (28, 8)$$

Diese Beziehung stellt, zusammen mit dem Wert (27, 3) der Impulsdichte $\mathbf{g}$, die drei eigentlichen Bewegungsgleichungen der NEWTONSchen Mechanik des Kontinuums dar. Es ist bemerkenswert, daß der in der Klammer von (28, 8) stehende Ausdruck nach (27, 2) gleich der verallgemeinerten Spannungskomponente p_{ik} ist. Die Bewegungsgleichungen (28, 8) lassen sich also auch in folgender Form schreiben:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_i}{\partial t} = f_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (28, 9)$$

Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich aus der Beziehung, welche die Erhaltung der in δV enthaltenen Masse ausdrückt:

$$\frac{d}{dt} (\varrho \delta V) = 0. \quad (28, 10)$$

Beachtet man nämlich neben (28, 7) die zu (28, 5) analoge Beziehung

$$\frac{d\varrho}{dt} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} q_k + \frac{\partial \varrho}{\partial t},$$

so folgt aus (28, 10)

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} q_k + \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = 0.$$

Oder, wenn man den ersten mit dem dritten Term zusammenfaßt,

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\varrho q_k) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \quad (28, 11)$$

Dies ist die übliche Form der Kontinuitätsgleichung. Man kann sie wegen (27, 3) auch so schreiben:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \quad (28, 12)$$

§ 29. Der 4-dimensionale Tensor $T_{\lambda\mu}$

Unser nächstes Ziel besteht darin, von der NEWTONSchen zur relativistischen Mechanik des Kontinuums überzugehen. Dabei wollen wir ähnlich vorgehen, wie in § 11 beim Übergang von der NEWTONSchen zur relativistischen Dynamik des Massenpunktes. Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen in § 11 bildete die Bemerkung, daß in der NEWTONSchen Mechanik die drei Komponenten des Impulses und die Masse eines Massenpunktes bei GALILEI-Transformationen sich ähnlich wie die Raumkoordinaten x, y, z und die Zeit t verhalten. Diese in den Formeln (11, 4), (11, 5) enthaltene Bemerkung läßt sich in der Sprache der Tensorrechnung genauer ausdrücken. Um dies zu erreichen, schreiben wir die GALILEI-Transformation (11, 5) in 4-dimensionaler Form:

$$x'_\lambda = \sum_{\varrho} \beta_{\lambda\varrho} x_\varrho, \quad (29, 1)$$

mit der Matrix

$$\beta_{\lambda\varrho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i\frac{v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (29, 2)$$

Dieser Schreibweise entspricht ein formaler 4-dimensionaler Raum mit den Koordinaten $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ und $x_0 = ict$, den wir der Kürze halber als den GALILEISCHEN Raum bezeichnen wollen¹⁾. Die Beziehung (11, 4) läßt sich mit Hilfe von (29, 2) auch in der Form

$$p'_\lambda = \sum_{\varrho} \beta_{\lambda\varrho} p_\varrho \quad (29, 3)$$

schreiben und besagt, daß in der NEWTONSchen Mechanik die vier Größen p_1, p_2, p_3 und mc einen Vektor des GALILEISCHEN 4-dimensionalen Raumes bilden. Der Übergang von der NEWTONSchen zur relativistischen Dynamik besteht nun einfach in der Forderung, daß die Größen p_1, p_2, p_3 und mc

¹⁾ Daß es sich nur formal um einen 4-dimensionalen Raum handelt, folgt daraus, daß man bei den Koordinatentransformationen die vierte Koordinate x_0 immer unverändert lassen muß.

einen Vektor des MINKOWSKISCHEN, und nicht des GALILEISCHEN Raumes bilden. Wir ersetzen also die Beziehung (29, 3) durch

$$p'_\lambda = \sum_q \alpha_{\lambda q} p_q, \quad (29, 4)$$

wobei $\alpha_{\lambda q}$ die Koeffizienten der allgemeinen LORENTZ-Transformation (9, 1) sind.

Im Falle des Kontinuums werden wir nicht einen Vektor, sondern einen Tensor zweiter Stufe zugrunde legen müssen. Dies kann man sich am einfachsten durch die Bemerkung veranschaulichen, daß für die Bewegung des Massenpunktes nur der auf ihn wirkende Kraftvektor von Bedeutung ist, während im Falle des Kontinuums der Spannungstensor maßgebend wird. Wir gehen von den verallgemeinerten Spannungen p_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) aus und erweitern diese 3×3 -gliedrige Matrix zu einer 4×4 -gliedrigen Matrix $T_{\lambda\mu}$ unter Heranziehung der Komponenten g_i ($i = 1, 2, 3$) der Impulsdichte und der Massendichte ρ . Dabei lassen wir uns von der durch die Beziehungen (25, 14) bis (25, 17) gegebenen Form des MAXWELLSCHEN 4-dimensionalen Spannungstensors leiten. Ferner setzen wir, den Ergebnissen des § 14 entsprechend, die Energiedichte gleich ρc^2 und bilden auf diese Weise die Matrix

$$T_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & i c g_1 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & i c g_2 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & i c g_3 \\ i c g_1 & i c g_2 & i c g_3 & i^2 \rho c^2 \end{pmatrix}. \quad (29, 5)$$

Da nach (27, 4) p_{ik} symmetrisch ist, wird auch $T_{\lambda\mu}$ symmetrisch:

$$T_{\lambda\mu} = T_{\mu\lambda}. \quad (29, 6)$$

Gehen wir nun zu einem anderen Koordinatensystem x'_μ durch die GALILEI-Transformation (29, 1) und (29, 2) über, so wird sich auch in x'_μ eine entsprechende Matrix konstruieren lassen:

$$T'_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} p'_{11} & p'_{12} & p'_{13} & i c g'_1 \\ p'_{21} & p'_{22} & p'_{23} & i c g'_2 \\ p'_{31} & p'_{32} & p'_{33} & i c g'_3 \\ i c g'_1 & i c g'_2 & i c g'_3 & i^2 \rho' c^2 \end{pmatrix}.$$

Wir werden zeigen, daß zwischen den Größen $T'_{\lambda\mu}$ und $T_{\lambda\mu}$ folgende Beziehungen gelten:

$$T'_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha\sigma} \beta_{\lambda\alpha} \beta_{\mu\sigma} T_{\alpha\sigma}, \quad (29, 7)$$

d. h. daß $T_{\lambda\mu}$ sich bei GALILEI-Transformationen wie ein Tensor des GALILEISCHEN 4-dimensionalen Raumes verhält.

Um den Beweis von (29, 7) zu erbringen, werden wir zunächst die Werte der Komponenten $T'_{\lambda\mu}$ unmittelbar auf Grund ihrer physikalischen Bedeutung berechnen. Nach (27, 2) und (27, 3) gilt

$$p'_{ik} = \sigma_{ik} + g_i q_k, \quad g_i = \varrho q_i.$$

Es ist nun zu beachten, daß σ_{ik} bei der GALILEI-Transformation invariant bleibt,

$$\sigma'_{ik} = \sigma_{ik}. \quad (29, 8)$$

Der Grund dafür ist, daß σ_{ik} das Verhältnis einer Kraftkomponente zu einem Flächeninhalt darstellt und daß diese beiden Größen bei der GALILEI-Transformation unverändert bleiben. Ferner bleibt auch die Massendichte unverändert,

$$\varrho' = \varrho. \quad (29, 9)$$

Dagegen ändern sich die Komponenten der Geschwindigkeit nach (I, 4),

$$q'_1 = q_1 - v, \quad q'_2 = q_2, \quad q'_3 = q_3. \quad (29, 10)$$

Aus (29, 8), (29, 9) und (29, 10) folgt

$$p'_{11} = \sigma'_{11} + \varrho'(q'_1)^2 = \sigma_{11} + \varrho(q_1 - v)^2 = p_{11} - 2\varrho v q_1 + \varrho v^2.$$

Ähnlich lassen sich auch die anderen p'_{ik} ermitteln. Man findet

$$\begin{aligned} p'_{12} &= p_{12} - \varrho v q_2, & p'_{13} &= p_{13} - \varrho v q_3, \\ p'_{22} &= p_{22}, & p'_{23} &= p_{23}, & p'_{33} &= p_{33}. \end{aligned}$$

Für g'_1 folgt aus (29, 9) und (29, 10):

$$g'_1 = \varrho' q'_1 = \varrho(q_1 - v) = g_1 - \varrho v.$$

Dagegen ist $g'_2 = g_2$, $g'_3 = g_3$. Insgesamt findet man also

$$T'_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} p_{11} - 2\varrho v q_1 + \varrho v^2 & p_{12} - \varrho v q_2 & p_{13} - \varrho v q_3 & i c (g_1 - \varrho v) \\ p_{12} - \varrho v q_2 & p_{22} & p_{23} & i c g_2 \\ p_{13} - \varrho v q_3 & p_{23} & p_{33} & i c g_3 \\ i c (g_1 - \varrho v) & i c g_2 & i c g_3 & i^2 \varrho c^2 \end{pmatrix}. \quad (29, 11)$$

Man kann nun unmittelbar verifizieren, daß die Werte (29, 11) von $T'_{\lambda\mu}$ aus den Werten (29, 5) von $T_{\lambda\mu}$ mit Hilfe der Beziehungen (29, 7) und (29, 2) berechnet werden können. Wir zeigen es für die Komponente T'_{11} :

$$\begin{aligned} T'_{11} &= \sum_{\varrho\sigma} \beta_{1\varrho} \beta_{1\sigma} T_{\varrho\sigma} = \sum_{\varrho} (\beta_{11} \beta_{1\varrho} T_{1\varrho} + \beta_{10} \beta_{1\sigma} T_{0\sigma}) \\ &= (\beta_{11})^2 T_{11} + 2\beta_{11} \beta_{10} T_{10} + (\beta_{10})^2 T_{00} = T_{11} + 2i \frac{v}{c} T_{10} - \left(\frac{v}{c}\right)^2 T_{00}. \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Werte (29, 5) von $T_{\lambda\mu}$ einsetzen, erhalten wir

$$T'_{11} = p_{11} - 2\rho v q_1 + \rho v^2,$$

was mit dem durch (29, 11) gegebenen Wert übereinstimmt. Ähnlich verläuft die Rechnung auch für die anderen Komponenten $T'_{\lambda\mu}$. Damit haben wir bewiesen, daß in der NEWTONschen Mechanik des Kontinuums die Matrix (29, 5) einen Tensor des GALILEISchen 4-dimensionalen Raumes darstellt. Es ist bemerkenswert, daß wir zur Bildung dieser Matrix von den verallgemeinerten Spannungen p_{ik} und nicht von σ_{ik} ausgehen mußten. Zwar ist σ_{ik} ein Tensor bezüglich der Drehungen des 3-dimensionalen Raumes, bleibt aber bei der GALILEI-Transformation (29, 1) und (29, 2) unverändert und ist daher als Ausgangspunkt für die Definition von $T_{\lambda\mu}$ ungeeignet. In der speziellen Relativitätstheorie, in welcher der Tensor $T_{\lambda\mu}$ die fundamentale Rolle spielt, werden deshalb die Spannungen σ_{ik} den Größen p_{ik} gegenüber an Bedeutung verlieren. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, kann man im Falle eines Feldkontinuums die Größen σ_{ik} überhaupt nicht definieren.

Wir wollen noch die Bewegungsgleichungen (28, 9) und (28, 12) des Kontinuums in 4-dimensionaler Form schreiben. Dabei beschränken wir uns zunächst auf den Fall verschwindender äußerer Kräfte:

$$f_i = 0.$$

Dann nehmen die drei Gleichungen (28, 9) nach (29, 5) die Form an

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial T_{i\sigma}}{\partial x_{\sigma}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ähnlich ergibt sich aus Gleichung (28, 12)

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial T_{0\sigma}}{\partial x_{\sigma}} = 0.$$

Die vier Gleichungen (28, 9) und (28, 12) lassen sich also so zusammenfassen:

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial T_{\lambda\sigma}}{\partial x_{\sigma}} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3). \quad (29, 12)$$

Die Form (29, 12) der Bewegungsgleichungen ist deshalb besonders interessant, weil sie auch in der speziellen Relativitätstheorie unverändert gelten wird (vgl. § 31). Dies entspricht dem Sachverhalt in der Dynamik des Massenpunktes, in der bei kräftefreier Bewegung die Gleichung (12, 2),

$$p_{\lambda} = \text{const},$$

sowohl in der NEWTONSchen Mechanik als auch in der speziellen Relativitätstheorie gilt. Im Falle $f_i \neq 0$ lauten die Gleichungen (28, 9) und (28, 12)

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial T_{i\sigma}}{\partial x_{\sigma}} = f_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (29, 13)$$

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial T_{0\sigma}}{\partial x_{\sigma}} = 0. \quad (29, 14)$$

Die letzte dieser Gleichungen wird in der speziellen Relativitätstheorie eine im allgemeinen von Null verschiedene rechte Seite erhalten. Physikalisch hängt dies damit zusammen, daß in der speziellen Relativitätstheorie die Masse auf die Energie zurückgeführt wird und deshalb nur bei verschwindender Wechselwirkung konstant bleibt. Wir kommen auf diese Frage in § 31 zurück.

§ 30. Der Übergang zur speziellen Relativitätstheorie

Nachdem wir die NEWTONSche Mechanik des Kontinuums in 4-dimensionaler Form geschrieben haben, können wir den Übergang zur speziellen Relativitätstheorie sehr einfach durchführen. Es genügt dafür zu fordern, daß $T_{\lambda\mu}$ ein Tensor des MINKOWSKISchen und nicht des GALILEISchen Raumes ist. Wir werden also die Beziehung (29, 7) durch folgende ersetzen:

$$T'_{\lambda\mu} = \sum_{\sigma\varrho} \alpha_{\lambda\varrho} \alpha_{\mu\sigma} T_{\varrho\sigma}, \quad (30, 1)$$

wobei $\alpha_{\lambda\varrho}$ die Koeffizienten der allgemeinen LORENTZ-Transformation (9, 1) sind. Für die genaue Bestimmung der Struktur des Tensors $T_{\lambda\mu}$ werden wir im Falle eines materiellen Kontinuums noch fordern müssen — ähnlich wie in § 11 bei der Aufstellung der relativistischen Dynamik des Massenpunktes —, daß bei Bewegungen mit kleinen Geschwindigkeiten,

$$q \ll c,$$

die relativistische Mechanik des Kontinuums in die NEWTONSche übergeht. Bei einem Feldkontinuum dagegen wird der Tensor $T_{\lambda\mu}$ aus den Gleichungen der betreffenden Feldtheorie abgeleitet, wie wir es in § 25 für das elektromagnetische Feld gezeigt haben.

Die Tatsache, daß wir bei der Formulierung der relativistischen Mechanik des Kontinuums von der Gleichung (30, 1) ausgehen, zeigt ganz deutlich, daß in der speziellen Relativitätstheorie der Tensor $T_{\lambda\mu}$ eine fundamentale Rolle spielt. Wir werden diesen Tensor als den verallgemeinerten 4-dimensionalen Spannungstensor bezeichnen¹⁾. In der speziellen Relativitätstheorie werden einige von den Komponenten $T_{\lambda\mu}$ eine Bedeutung erhalten, die von

¹⁾ Andere in der Literatur vorkommende Bezeichnungen: Spannungs-Energie-Impulstensor, mechanischer Tensor, Materietensor.

der in der NEWTONschen Mechanik geltenden wesentlich abweicht. Dies ist vor allem eine Folge der Beziehung zwischen Masse und Energie und wird daher diejenigen Komponenten $T_{\lambda\mu}$ betreffen, bei denen mindestens ein Index den Wert 0 hat. Wir werden diese Frage im folgenden ausführlich diskutieren.

In der NEWTONschen Mechanik stellt die Masse nach (11, 2) das Verhältnis des Impulses zur Geschwindigkeit dar:

$$\mathbf{p} = m \mathbf{q}. \quad (30, 2)$$

Dementsprechend ist die Massendichte bei einem Kontinuum nach (27, 3) das Verhältnis der Impulsdichte zur Geschwindigkeit,

$$\mathbf{g} = \rho \mathbf{q}. \quad (30, 3)$$

In der relativistischen Dynamik des Massenpunktes bleibt die Beziehung (30, 2) gültig. Dazu kommt aber die neue, viel tiefer gehende Erkenntnis, daß mc^2 gleich der Gesamtenergie des Teilchens ist. Dieser neuen Bedeutung von m entsprechend werden wir in der relativistischen Mechanik des Kontinuums die Größe ρc^2 als die Energiedichte auffassen. Bezeichnen wir also die Energiedichte mit W , so gilt

$$W = \rho c^2. \quad (30, 4)$$

Nach (29, 5) wird dann

$$T_{00} = -W = i^2 W. \quad (30, 5)$$

Oder, bei Verwendung der reellen Zeitkoordinate $x_4 = ct$,

$$T_{44} = W. \quad (30, 5a)$$

Es ist bemerkenswert, daß wir die Beziehung (30, 5) bzw. (30, 5a) auch in der Theorie des elektromagnetischen Feldes ableiten konnten [vgl. Formeln (25, 16) und (25, 18)]. Dies ist also eine sehr allgemeine Beziehung, die in der speziellen Relativitätstheorie sowohl für das materielle Kontinuum als auch für das Feldkontinuum gilt. Dagegen bleibt in der relativistischen Mechanik die Beziehung (30, 3) nicht erhalten, wie wir weiter unten zeigen werden.

Multiplizieren wir die vierte fundamentale Gleichung (28, 12) der NEWTONschen Mechanik des Kontinuums mit c^2 , so folgt nach (30, 4)

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (c^2 g_k) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \quad (30, 6)$$

In der speziellen Relativitätstheorie wird also diese Beziehung das Energiegesetz ausdrücken müssen. Daraus folgt zunächst, daß diese Beziehung in der speziellen Relativitätstheorie nur dann gelten wird, wenn auf das materielle Kontinuum keine äußeren Kräfte wirken, d. h. wenn $f_i = 0$ ist.

Mit der Verallgemeinerung von (30, 6) für den Fall $f_i \neq 0$ werden wir uns im nächsten Abschnitt beschäftigen. Zweitens folgt aus (30, 6), daß wir die Produkte $c^2 g_k$ ($k = 1, 2, 3$) auch als die Komponenten der Energiestromdichte auffassen können. Wenn wir also die Energiestromdichte mit dem 3-dimensionalen Vektor $\mathfrak{S}$ bezeichnen, so gilt

$$\mathfrak{S} = c^2 \mathbf{g}. \quad (30, 7)$$

Diese Beziehung ist mit der für das elektromagnetische Feld geltenden Gleichung (25, 17) identisch und gilt daher ganz allgemein sowohl für das materielle Kontinuum als auch für das Feldkontinuum. Es sei noch bemerkt, daß die Beziehung (30, 7) aus der Tatsache folgt, daß wir die Matrix (29, 5) symmetrisch angesetzt haben. Dies war auch wirklich erforderlich, um zu der 4-dimensionalen Formulierung der NEWTONSchen Mechanik des Kontinuums zu gelangen. Es folgt dann aber aus der am Ende des vorigen Abschnitts gestellten Forderung, wonach die relativistische Mechanik des materiellen Kontinuums für $q \ll c$ in die NEWTONsche übergehen muß, daß für ein materielles Kontinuum auch der relativistische Tensor $T_{\lambda\mu}$ symmetrisch sein muß. Dagegen läßt sich eine ähnliche Aussage für ein Feldkontinuum nicht allgemein begründen. Man hat im Gegenteil bei Feldtheorien oft auch nicht-symmetrische Tensoren $T_{\lambda\mu}$ betrachtet. Diese sind aber nicht eindeutig definiert und können immer auf eine symmetrische Form zurückgeführt werden. Wir werden uns deshalb im folgenden auf diese symmetrische Form beschränken, also den Tensor $T_{\lambda\mu}$ allgemein als symmetrisch voraussetzen.

Man kann nun mit Hilfe von (30, 7) zeigen, daß in der speziellen Relativitätstheorie die Beziehung (30, 3) im allgemeinen nicht gilt. Am einfachsten läßt sich dies dadurch erreichen, daß wir einen Spezialfall angeben, in welchem $\mathbf{g}$ und $\mathbf{q}$ nicht einmal parallel zueinander sind. Wir betrachten ein materielles Kontinuum, das an einer bestimmten Stelle eine zur x_1 -Achse parallele Geschwindigkeit hat:

$$q_1 = q, \quad q_2 = q_3 = 0.$$

Wir denken uns an dieser Stelle ein zur x_2 -Achse senkrechtes Flächenelement δS und nehmen noch an, daß die Spannung σ_{12} von Null verschieden sei.

Dann wird auf die unmittelbar über δS liegende Flüssigkeit die zur x_1 -Achse parallele Kraft

$$\delta F = \sigma_{12} \delta S$$

wirken (Fig. 12). Diese Kraft ist zur Geschwindigkeit parallel und liefert daher die Arbeitsleistung

$$\delta W = q \delta F = q \sigma_{12} \delta S.$$

Beachtet man noch, daß diese Kraft von der unteren auf die obere Flüssigkeit ausgeübt wird, so folgt, daß es in diesem Fall eine zur x_2 -Achse parallele Energieströmung von der Dichte

$$S_2 = q \sigma_{12}$$

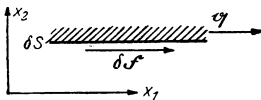


Fig. 12

gibt. Nach (30, 7) wird aber dann

$$g_2 = \frac{1}{c^2} S_2 = \frac{1}{c^2} q \sigma_{12}.$$

Es gibt also eine nichtverschwindende Komponente g_2 der Impulsdichte, obwohl die entsprechende Komponente der Geschwindigkeit gleich Null ist. Es ist zweckmäßiger, in der letzten Formel σ_{12} durch p_{12} auszudrücken, was man mit Hilfe von (27, 2) tun kann. Wegen $q_2 = 0$ folgt nämlich aus (27, 2)

$$p_{12} = \sigma_{12}.$$

Daher ist

$$g_2 = \frac{1}{c^2} q p_{12}. \quad (30, 8)$$

Ähnlich findet man auch die Beziehung

$$g_3 = \frac{1}{c^2} q p_{13}. \quad (30, 9)$$

Diesen Betrachtungen entsprechend kann man sich in einem materiellen Kontinuum die Impulsdichte in zwei Terme zerlegt denken. Der erste Term rührt von der Bewegung der Materie her und ist durch den NEWTONschen Ausdruck ϱq gegeben. Der zweite Term dagegen muß die Arbeitsleistung der Spannungen zum Ausdruck bringen. Gehen wir nochmals zum Beispiel der Fig. 12 zurück, so wird der materielle Teil der zur x_1 -Achse parallelen Komponente der Impulsdichte gleich ϱq . Um den zweiten Teil dieser Impulsdichte zu berechnen, müssen wir ein zur x_1 -Achse senkrechtes Flächenelement $\delta S'$ betrachten. Die Arbeit leistende Kraftkomponente wird dann gleich $\sigma_{11} \delta S'$ und daher dieser zweite Teil von g_1 gleich $\frac{1}{c^2} q \sigma_{11}$. Es gilt also die Beziehung

$$g_1 = \varrho q + \frac{1}{c^2} q \sigma_{11}.$$

Oder, wenn wir σ_{11} mit Hilfe von (27, 2) durch p_{11} ausdrücken,

$$g_1 = \varrho q + \frac{1}{c^2} q (p_{11} - g_1 q).$$

Daraus folgt

$$g_1 = \frac{1}{1 + \frac{q^2}{c^2}} q \left(\varrho + \frac{1}{c^2} p_{11} \right). \quad (30, 10)$$

Wir wollen noch zeigen, daß die Beziehungen (30, 8), (30, 9) und (30, 10) auch aus der Transformationsformel (30, 1) von $T_{\lambda\mu}$ abgeleitet werden können.

Dadurch werden wir auch die Gelegenheit haben, eine konkrete Anwendung dieser Formel zu geben. Wir gehen von dem Ruhssystem der Flüssigkeit aus, das wir mit x_μ^* bezeichnen wollen¹⁾. In diesem Koordinatensystem werden beide Teile, in die wir die Impulsdichte des materiellen Kontinuums zerlegt haben, verschwinden. Der materielle Teil ρq verschwindet wegen $q = 0$. Aber auch der zweite, der Arbeitsleistung der Spannungen entsprechende Teil wird ebenfalls verschwinden, da auch in der Arbeitsleistung die Geschwindigkeit als Faktor enthalten ist. Es gilt also

$$g_k^* = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (30, 11)$$

Umgekehrt wird durch die Beziehung (30, 11) das Ruhssystem eines materiellen Kontinuums eindeutig festgelegt. Der Tensor $T_{\lambda\mu}$ hat also in x_μ^* die Form

$$T_{\lambda\mu}^* = \begin{pmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* & 0 \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* & 0 \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i^2 \rho^* c^2 \end{pmatrix}. \quad (30, 12)$$

Wir führen nun eine LORENTZ-Transformation aus,

$$x_\lambda = \sum_q \alpha_{\lambda q} x_q^*, \quad (30, 13)$$

mit der durch (9, 10) gegebenen Matrix $\alpha_{\lambda q}$,

$$\alpha_{\lambda q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i\beta \\ \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \sqrt{1-\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}. \quad (30, 14)$$

Im neuen Koordinatensystem x_λ hat die Geschwindigkeit der Flüssigkeit die Komponenten

$$q_1 = q = -v, \quad q_2 = q_3 = 0.$$

Wir können dann die neuen Komponenten $T_{\lambda\mu}$ des 4-dimensionalen Spannungstensors aus den Komponenten $T_{\lambda\mu}^*$ mit Hilfe der Transformationsformel (30, 1),

$$T_{\lambda\mu} = \sum_{\rho\sigma} \alpha_{\lambda\rho} \alpha_{\mu\sigma} T_{\rho\sigma}^*,$$

¹⁾ Ist x_μ^* das Ruhssystem der ganzen Flüssigkeit, so liegt in x_μ^* ein statisches Problem vor. Im allgemeinen Falle genügt es aber, wenn im Koordinatensystem x_μ^* die Geschwindigkeit q der Flüssigkeit nur an einer bestimmten Stelle gleich Null wird. Dann ist x_μ^* das lokale, dieser Stelle entsprechende Ruhssystem der Flüssigkeit.

berechnen. Wir geben die Rechnung für die Komponente T_{11} wieder:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \sum_{\sigma} \alpha_{1\sigma} \alpha_{1\sigma} T_{\sigma\sigma}^* = \sum_{\sigma} (\alpha_{11} \alpha_{1\sigma} T_{1\sigma}^* + \alpha_{10} \alpha_{1\sigma} T_{0\sigma}^*) \\ &= (\alpha_{11})^2 T_{11}^* + 2 \alpha_{11} \alpha_{10} T_{10}^* + (\alpha_{10})^2 T_{00}^*. \end{aligned}$$

Nach (30, 12) ist aber $T_{10}^* = 0$. Führen wir noch die durch (30, 12) und (30, 14) gegebenen Werte von α_{11} , α_{10} , T_{11}^* und T_{00}^* ein, so ergibt sich

$$T_{11} = \frac{1}{1-\beta^2} (p_{11}^* + e^* q^2).$$

Ähnlich berechnet man auch die anderen Komponenten $T_{\lambda\mu}$. Das Gesamtergebnis lautet:

$$T_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} \frac{p_{11}^* + e^* q^2}{1-\beta^2} & \frac{p_{12}^*}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{p_{13}^*}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{icq}{1-\beta^2} \left(e^* + \frac{p_{11}^*}{c^2} \right) \\ \frac{p_{12}^*}{\sqrt{1-\beta^2}} & p_{22}^* & p_{23}^* & \frac{icq}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{p_{12}^*}{c^2} \\ \frac{p_{13}^*}{\sqrt{1-\beta^2}} & p_{32}^* & p_{33}^* & \frac{icq}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{p_{13}^*}{c^2} \\ \frac{icq}{1-\beta^2} \left(e^* + \frac{p_{11}^*}{c^2} \right) & \frac{icq}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{p_{12}^*}{c^2} & \frac{icq}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{p_{13}^*}{c^2} & \frac{i^2}{1-\beta^2} (e^* c^2 + \beta^2 p_{11}^*) \end{pmatrix}. \quad (30, 15)$$

Mit diesen Werten von $T_{\lambda\mu}$ kann man unmittelbar bestätigen, daß die Beziehungen (30, 8), (30, 9) und (30, 10) tatsächlich erfüllt sind. Es sei noch bemerkt, daß es für die eigentlichen Spannungen σ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) kein einfaches, allgemein gültiges Transformationsgesetz gibt. Man wird sie nur mit Hilfe der Formel (27, 2) berechnen können, welche die Rolle der Definitionsgleichung von σ_{ik} in der speziellen Relativitätstheorie übernimmt.

Übrigens kann man die Spannungen σ_{ik} nur in einem materiellen Kontinuum definieren. Im Falle eines Feldkontinuums erlaubt nämlich die Beziehung (30, 11) keine eindeutige Bestimmung eines entsprechenden Ruhesystems, wie man am Beispiel des elektromagnetischen Feldes sofort einsehen kann: In diesem Fall bedeutet die Beziehung (30, 11) nach (25, 8)

$$[\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = 0,$$

d. h., $\mathfrak{E}$ muß parallel zu $\mathfrak{H}$ sein. Diese Bedingung läßt sich zwar im allgemeinen erfüllen. Nimmt man dann aber die gemeinsame Richtung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ als x_1 -Richtung,

$$\mathfrak{E} = (E, 0, 0), \quad \mathfrak{H} = (H, 0, 0),$$

und führt anschließend die spezielle LORENTZ-Transformation (4, 12) aus, so werden auch im neuen Koordinatensystem x'_μ die Feldstärken $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$

nach (22, 6) zueinander parallel, d. h. es wird auch $g' = 0$. Man kann also mit Hilfe der Gleichung (30, 11) für das elektromagnetische Feld kein eindeutig bestimmtes Ruhssystem definieren. Folglich wird man auch keine Geschwindigkeit q und daher auch keine Spannungen σ_{ik} definieren können.

§ 31. Die relativistischen Bewegungsgleichungen des Kontinuums

Wir betrachten zunächst ein materielles Kontinuum, auf das keine äußeren Kräfte einwirken. In der NEWTONSchen Mechanik gelten dann die Gleichungen (28, 9) und (28, 12) mit $f_i = 0$. Die Gleichungen (28, 9) drücken die Erhaltung des Impulses aus und dürfen auch in die Relativitätstheorie ungeändert übernommen werden. Die vierte Gleichung (28, 12), die in der NEWTONSchen Mechanik die Erhaltung der Masse ausdrückt, wurde in der Relativitätstheorie durch (30, 4) als die Energiegleichung umgedeutet. Da wir das Kontinuum als von äußeren Einwirkungen frei angenommen haben, bleiben sowohl sein Impuls als auch seine Energie erhalten. Wir werden also im vorliegenden Fall auch die Gleichung (28, 12) ungeändert in die relativistische Mechanik übernehmen müssen. In 4-dimensionalen Form sind diese Gleichungen durch (29, 12) gegeben:

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial T_{\lambda\sigma}}{\partial x_{\sigma}} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3). \quad (31, 1)$$

Wirken dagegen auf das Kontinuum äußere Kräfte ein, so bringt die Größe f_i , welche auf der rechten Seite von (28, 9) steht, den durch diese äußeren Kräfte dem betrachteten Kontinuum zugeführten Impuls zum Ausdruck. Gleichung (28, 9) stellt also wieder die richtige Formulierung des Impulses dar und wird daher auch in der Relativitätstheorie in ihrer Form (29, 13) unverändert gelten. Dagegen würde aus der Gleichung (28, 12) nach ihrer relativistischen Umdeutung folgen, daß die Energie des Kontinuums erhalten bleibt. Dies ist aber offenbar unrichtig, da die äußeren Kräfte eine im allgemeinen nicht verschwindende Arbeit leisten und dadurch die Energie des Kontinuums verändern. Die rechte Seite von (28, 12) muß also in der Relativitätstheorie, ähnlich wie die der Gleichungen (28, 9), von Null verschieden sein. Dieselbe Forderung kommt auch von einer anderen Seite her. Wir müssen nämlich die 3-dimensionale Kraftdichte f zu einem 4-dimensionalen Vektor f_{λ} erweitern. Gleichung (28, 12) bzw. (29, 14) wird also zu

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial T_{\lambda\sigma}}{\partial x_{\sigma}} = f_{\lambda} \quad (31, 2)$$

ergänzt. Die Bedeutung von f_0 folgt unmittelbar aus (30, 5): f_0 ist die pro Volum- und Zeiteinheit dem Kontinuum zugeführte Energie, multipliziert

mit $\frac{i}{c}$. Wenn es sich also um einen rein mechanischen Prozeß handelt, wird f_0 der mit $\frac{i}{c}$ multiplizierten Arbeitsleistung der Kraftdichte $\mathfrak{f}$ gleich:

$$f_0 = \frac{i}{c} (\mathfrak{f} \mathbf{q}). \quad (31, 3)$$

Gleichungen (29, 13) und (31, 2) lassen sich in der 4-dimensionalen Formel

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial T_{\lambda\sigma}}{\partial x_{\sigma}} = f_{\lambda} \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3) \quad (31, 4)$$

zusammenfassen, welche offensichtlich eine Vektorgleichung des MINKOWSKI-schen Raumes ist. Für $f_{\lambda} = 0$ geht natürlich (31, 4) in (31, 1) über.

Ist das äußere Feld z. B. ein elektromagnetisches, so kann man nach (25, 20) die Kraftdichte f_{λ} auf den durch (25, 12) gegebenen MAXWELLSchen Spannungstensor zurückführen. Bezeichnen wir also zur Unterscheidung vom Tensor $T_{\lambda\mu}$ des materiellen Kontinuums den MAXWELLSchen Tensor mit $(T_{em})_{\lambda\mu}$, so gilt

$$f_{\lambda} = - \sum_{\varrho} \frac{\partial (T_{em})_{\lambda\varrho}}{\partial x_{\varrho}}. \quad (31, 5)$$

Führt man diesen Ausdruck in (31, 4) ein, so folgt

$$\sum_{\varrho} \frac{\partial}{\partial x_{\varrho}} [T_{\lambda\varrho} + (T_{em})_{\lambda\varrho}] = 0. \quad (31, 6)$$

Dies ist eine Beziehung von der Form (31, 1), wobei an Stelle von $T_{\lambda\mu}$ die Summe der Spannungstensoren des materiellen und des MAXWELLSchen Kontinuums auftritt. Physikalisch ist die Beziehung (31, 6) unmittelbar verständlich. Da wir nämlich angenommen haben, daß es keine anderen als die elektromagnetischen Wirkungen gibt, ist das kombinierte materielle und MAXWELLSche Kontinuum kräftefrei, und daher muß es der Bewegungsgleichung (31, 1) genügen. Offenbar wird man ein ähnliches Ergebnis auch für irgendein anderes Feld erhalten, wenn man von der speziell-relativistischen Beschreibung dieses Feldes ausgeht¹⁾. Danach kann man die Gleichung (31, 1) als die Grundgleichung der speziellen Relativitätstheorie ansehen, unter der Bedingung, daß man unter $T_{\lambda\mu}$ die Summe der Spannungstensoren des materiellen Kontinuums und aller vorhandenen Felder versteht. In gewissen Fällen wird man aber von der Form (31, 4) ausgehen müssen. Dies

¹⁾ Man nimmt heute an, daß eine solche Beschreibung für alle Felder, mit der einzigen Ausnahme des Gravitationsfeldes, möglich ist. Letzteres erfordert nach der allgemeinen Relativitätstheorie die Verwendung eines RIEMANNschen Raumes und kann daher im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie nicht beschrieben werden.

trifft insbesondere dann zu, wenn man sich mit dem Problem der Bewegung eines Probeteilchens in einem vorgegebenen Feld beschäftigt. Wir werden dieses Problem im nächsten Abschnitt behandeln.

§ 32. Anwendungen

Das statische System. Wir betrachten ein statisches mechanisches System. Alle Komponenten des 4-dimensionalen Spannungstensors $T_{\lambda\mu}$, welcher dieses System beschreibt, sind von der Zeit unabhängig:

$$\frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial t} = 0. \quad (32, 1)$$

Ferner wollen wir annehmen, daß das System isoliert ist, d. h., daß es mit keinen anderen Systemen wechselwirkt. Eventuelle Wechselwirkungen zwischen Teilen des betrachteten Systems werden wir uns als durch den Spannungstensor des entsprechenden Feldes beschrieben und im Gesamtensor $T_{\lambda\mu}$ enthalten denken, so daß wir von der Grundgleichung (31, 1) ausgehen dürfen:

$$\sum_{\varrho} \frac{\partial T_{\lambda\varrho}}{\partial x_{\varrho}} = 0. \quad (32, 2)$$

Schließlich werden wir annehmen, daß das System endliche Ausdehnung hat. Es gibt also eine geschlossene, im Endlichen verlaufende Fläche S_0 des 3-dimensionalen Raumes, außerhalb deren sämtliche Komponenten $T_{\lambda\mu}$ verschwinden:

$$T_{\lambda\varrho} = 0 \quad \text{außerhalb } S_0. \quad (32, 3)$$

Für ein solches System folgen aus der Grundgleichung (32, 2) einige wichtige Formeln, die wir jetzt ableiten wollen.

Aus (32, 2) folgt unmittelbar

$$\sum_{\varrho} \frac{\partial}{\partial x_{\varrho}} (x_i T_{\lambda\varrho}) = \sum_{\varrho} \frac{\partial x_i}{\partial x_{\varrho}} T_{\lambda\varrho} = \sum_{\varrho} \delta_{i\varrho} T_{\lambda\varrho} = T_{\lambda i}. \quad (32, 4)$$

Nehmen wir noch an, daß der Index i von Null verschieden ist, so wird neben $T_{\lambda\mu}$ auch $x_i T_{\lambda\mu}$ von der Zeit unabhängig sein. Daher verschwindet der zu $\varrho=0$ entsprechende Term der linken Seite von (32, 4), und es bleibt

$$T_{\lambda i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i T_{\lambda k}) \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, 3; \\ \lambda = 0, 1, 2, 3 \end{array} \right). \quad (32, 5)$$

Wir integrieren diese Beziehung über den 3-dimensionalen Raum. Dabei genügt es, wegen (32, 3), die Integration über einen Bereich V auszuführen, der die Fläche S_0 enthält:

$$\int_V T_{\lambda i} dV = \int_V \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i T_{\lambda k}) dV.$$

Die rechte Seite läßt sich mit Hilfe des GAUSS'schen Satzes in ein Flächenintegral verwandeln. Sind also n_k ($k=1, 2, 3$) die Komponenten des zu dS senkrechten, nach außen weisenden Einheitsvektors, so gilt

$$\int_V T_{\lambda i} dV = \int_S \sum_{k=1}^3 x_i T_{\lambda k} n_k dS.$$

Die Integrationsfläche S liegt aber außerhalb S_0 . Nach (32, 3) ist also im Integranden des Flächenintegrals $T_{\lambda k} = 0$, so daß dieses Integral gleich Null wird. Es folgt

$$\int_V T_{\lambda i} dV = 0. \quad (32, 6)$$

Nach (32, 5) gilt die Beziehung (32, 6) für $\lambda = 0, 1, 2, 3$ und $i = 1, 2, 3$.

Betrachten wir zunächst den Wert $\lambda = 0$, so besagt (32, 6), daß der Gesamtimpuls des betrachteten Systems verschwindet:

$$p_k = \int g_k dV = \frac{1}{ic} \int T_{0k} dV = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (32, 7)$$

Für $\lambda, i = 1, 2, 3$ dagegen bedeutet die Beziehung (32, 6), daß bei einem statischen System die Volumintegrale der Spannungen $p_{\lambda i}$ verschwinden:

$$\int p_{\lambda i} dV = \int T_{\lambda i} dV = 0 \quad (\lambda, i = 1, 2, 3). \quad (32, 8)$$

Von den zehn unabhängigen Komponenten $T_{\lambda\mu}$ liefert also im statischen Fall nur die Komponente T_{00} ein von Null verschiedenes Volumintegral. Dieses ist nach (30, 5) gleich der mit i^2 multiplizierten Gesamtenergie des Systems:

$$\int T_{00} dV = i^2 E = -E. \quad (32, 9)$$

Ist das betrachtete System ein materielles Kontinuum, so wird es nur dann statisch sein, wenn die Beziehung (30, 11) erfüllt ist, d. h. wenn

$$T_{k0} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (32, 10)$$

Anderenfalls hätten wir lediglich mit einem System zu tun, das sich in einem stationären Bewegungszustand befindet. Dagegen ist bei einem Feldkonti-

num die Unterscheidung zwischen einem statischen und einem stationären Zustand zunächst unmöglich. Nur wenn man das Feld zusammen mit der es erzeugenden Materie betrachtet, wird man wieder den statischen vom stationären Fall unterscheiden können. Es sei noch bemerkt, daß bei der Ableitung der Formel (32, 6) die Beziehung (32, 10) nicht gebraucht wurde, so daß Formel (32, 6) nicht nur für die statischen, sondern auch für die stationären Systeme gilt.

Wir betrachten nun ein statisches materielles Kontinuum, für welches also neben (32, 2) noch die Beziehung (32, 10) gilt. Das Koordinatensystem, in dem wir dieses Kontinuum beschreiben, stimmt dann mit seinem Ruhsystem überein. Bezeichnen wir dieses Koordinatensystem mit x_i^* , so wird nach (30, 12)

$$T_{00}^* = -\varrho^* c^2. \quad (32, 11)$$

Ferner gilt die Beziehung (32, 10), die wir jetzt so schreiben müssen:

$$T_{k0}^* = 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Schließlich haben wir (32, 8):

$$\int T_{ik}^* dV = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Letztere Beziehungen legen folgende vereinfachende Annahme nahe:

$$T_{ik}^* = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (32, 12)$$

Da die Spannungen in einem isolierten System lediglich eine Folge der Wechselwirkung verschiedener Teile des Systems untereinander sind, bedeutet die Annahme (32, 12), daß wir diese Wechselwirkung vernachlässigen. Streng genommen würde also die Beziehung (32, 12) für ein Kontinuum gelten, dessen Teile überhaupt nicht miteinander wechselwirken. Ein solches Kontinuum bezeichnet man als eine *inkohärente Flüssigkeit*. Im Ruhsystem verschwinden also bei einer inkohärenten Flüssigkeit sämtliche Komponenten $T_{\lambda\mu}^*$ mit Ausnahme von T_{00}^* . Beachtet man, daß im Ruhsystem die 4-dimensionale Geschwindigkeit der Flüssigkeit nach (10, 6) die Komponenten

$$u_1^* = u_2^* = u_3^* = 0, \quad u_0^* = i c$$

hat, so folgt, daß man $T_{\lambda\mu}^*$ in der Form

$$T_{\lambda\mu}^* = \varrho^* u_\lambda^* u_\mu^* \quad (32, 13)$$

schreiben kann. Diese Formel bietet den Vorteil, daß sie sich unmittelbar für ein beliebiges Koordinatensystem verallgemeinern läßt. Gehen wir nämlich durch eine LORENTZ-Transformation vom Ruhsystem x_μ^* zu einem anderen Koordinatensystem x_μ über, so wird der Spannungstensor des betrachteten Kontinuums im Koordinatensystem x_μ durch

$$T_{\lambda\mu} = \varrho^* u_\lambda u_\mu \quad (32, 14)$$

gegeben, wobei u_λ die Geschwindigkeit des Kontinuums in x_μ bedeutet. Der Beweis folgt aus der Bemerkung, daß die Ruhmassendichte ϱ^* als eine

skalare Größe anzusehen ist, da sie in allen Koordinatensystemen unverändert übernommen wird. Daher ist die durch (32, 14) bestimmte Größe nach den Ausführungen des § 18 ein Tensor zweiter Stufe, und zwar gerade derjenige Tensor, der im Ruhssystem x_μ^* mit (32, 13) übereinstimmt.

Im Koordinatensystem x_μ führt die betrachtete inkohärente Flüssigkeit eine Translationsbewegung mit der konstanten Geschwindigkeit u_k aus. Der Gesamtimpuls in diesem Koordinatensystem wird durch das Integral der Impulsdichte gegeben:

$$p_k = \int g_k dV = \frac{1}{ic} \int T_{0k} dV \quad (k = 1, 2, 3).$$

Mit dem aus (32, 14) folgenden Wert von T_{k0} wird das:

$$p_k = \frac{1}{ic} \int \varrho^* u_k u_0 dV.$$

Nach (5, 6) und (10, 6) ist aber $\frac{1}{ic} u_0 dV$ nichts anderes als das Ruhvolumen dV^* . Beachtet man noch, daß u_k konstant ist, so folgt

$$p_k = \int \varrho^* dV^* \cdot u_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (32, 15)$$

Das Integral

$$\int \varrho^* dV^* = m_0 \quad (32, 16)$$

kann man als die Ruhmasse des Systems bezeichnen. Dies ist deshalb gerechtfertigt, weil die Gesamtenergie im Ruhssystem, d. h. die Ruhenergie E_0 , durch

$$E_0 = - \int T_{00}^* dV^* = \int \varrho^* dV^* \cdot c^2 = m_0 c^2 \quad (32, 17)$$

gegeben ist, was mit der Beziehung (14, 7 a) übereinstimmt. Für die Energie im Koordinatensystem x_μ findet man

$$E = - \int T_{00} dV = \int \varrho^* (u_4)^2 dV = \int \varrho^* u_4 c dV^*.$$

Beachtet man, daß u_4 konstant ist, so folgt

$$E = m_0 c u_4. \quad (32, 18)$$

Daher:

$$\frac{E}{c} = p_4 = m_0 u_4. \quad (32, 19)$$

Die Gleichungen (32, 15) und (32, 19) stimmen mit der Formel (11, 8) überein, die nach den Ausführungen des § 11 für ein materielles Teilchen gilt. Man kann also die Formel (11, 8) der Dynamik des Massenpunktes aus der Grundgleichung (32, 2) der Mechanik des Kontinuums ableiten. Dazu genügt die

Annahme, daß das Teilchen nicht in Strenge ein Massenpunkt ist, d. h., daß es eine zwar sehr kleine, immer aber nichtverschwindende Ausdehnung hat, so daß wir es in Wirklichkeit mit einem räumlich begrenzten Kontinuum zu tun haben.

Die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes. Auch die Bewegungsgleichung eines Teilchens in einem gegebenen äußeren Kraftfeld läßt sich aus der Bewegungsgleichung des Kontinuums ableiten. In diesem Fall werden wir aber von der Form (31, 4) der Bewegungsgleichung des Kontinuums ausgehen müssen. Am einfachsten erreichen wir unser Ziel, wenn wir annehmen, daß die gewöhnlichen 3-dimensionalen Spannungen im Innern des Teilchens verschwindend klein sind. Wir dürfen dann die für eine inkohärente Flüssigkeit geltende Form (32, 14) des Tensors $T_{\lambda\mu}$ zugrunde legen. Nur wird im jetzigen Fall wegen des äußeren Kraftfeldes die Geschwindigkeit u_λ nicht mehr konstant sein, sondern von den Koordinaten x_μ abhängen.

Aus (32, 14) folgt unmittelbar

$$\sum_{\mu} \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x_{\mu}} = \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\varrho^* u_{\lambda}) \cdot u_{\mu} + \varrho^* u_{\lambda} \sum_{\mu} \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x_{\mu}}. \quad (32, 20)$$

Beachtet man, daß nach (10, 4) $u_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{d\tau}$ ist, so ergibt der erste Term der rechten Seite

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\varrho^* u_{\lambda}) u_{\mu} = \frac{d}{d\tau} (\varrho^* u_{\lambda}). \quad (32, 21)$$

Ferner gilt

$$\sum_{\mu} \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_0}{\partial x_0}.$$

Nach (10, 6) ist

$$u_k = \frac{1}{c} q_k u_4, \quad u_4 = \frac{u_0}{i} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}};$$

daher

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x_{\mu}} &= \frac{1}{c} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (q_k u_4) + \frac{\partial u_4}{c \partial t} \\ &= \frac{u_4}{c} \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{1}{c} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_4}{\partial x_k} q_k + \frac{\partial u_4}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Da $q_k = \frac{dx_k}{dt}$ ist, wird die letzte Klammer gleich $\frac{du_4}{dt}$. Also

$$\sum_{\mu} \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = \frac{u_4}{c} \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{du_4}{c dt}. \quad (32, 22)$$

Setzen wir (32, 21) und (32, 22) in (32, 20), so folgt

$$\sum_{\mu} \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x_{\mu}} = \frac{d}{d\tau} (\varrho^* u_{\lambda}) + \varrho^* u_{\lambda} \frac{1}{c} \left(u_4 \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{du_4}{dt} \right).$$

In der letzten Gleichung ersetzen wir $\sum_{\mu} \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x_{\mu}}$ nach (31, 4) durch die Kraftdichte f_{λ} und multiplizieren dann die Gleichung mit dem Volumen des Teilchens in seinem Ruhsystem. Bezeichnen wir dieses Ruhvolumen mit δV^* , so wird

$$f_{\lambda} \delta V^* = \frac{d}{d\tau} (\varrho^* u_{\lambda}) \delta V^* + \varrho^* u_{\lambda} \delta V^* \frac{1}{c} \left(u_4 \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{du_4}{dt} \right). \quad (32, 23)$$

Andererseits ergibt sich aus (5, 6) und (10, 6)

$$\delta V^* = \frac{1}{c} u_4 \delta V;$$

daher ist

$$\frac{d}{dt} (\delta V^*) = \frac{1}{c} u_4 \frac{d}{dt} (\delta V) + \frac{1}{c} \frac{du_4}{dt} \delta V.$$

Und wenn wir (28, 7) berücksichtigen,

$$\frac{d}{dt} (\delta V^*) = \frac{1}{c} \left(u_4 \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{du_4}{dt} \right) \delta V.$$

Multiplizieren wir noch mit $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{c} u_4$, so folgt

$$\frac{d}{d\tau} (\delta V^*) = \frac{1}{c} \left(u_4 \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{du_4}{dt} \right) \delta V^*.$$

Mit diesem Ergebnis vereinfacht sich Gleichung (32, 23) zu

$$f_{\lambda} \delta V^* = \frac{d}{d\tau} (\varrho^* u_{\lambda}) \delta V^* + \varrho^* u_{\lambda} \frac{d}{d\tau} (\delta V^*) = \frac{d}{d\tau} (\varrho^* u_{\lambda} \delta V^*).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nach (26, 12) nichts anderes als die auf das Teilchen wirkende 4-dimensionale Kraft K_λ . Beachtet man noch, daß $\varrho^* \delta V^*$ mit der Ruhmasse m_0 des Teilchens übereinstimmt, so ergibt sich aus der letzten Beziehung die Bewegungsgleichung (15, 2) des Teilchens:

$$K_\lambda = \frac{d}{d\tau} (m_0 u_\lambda). \quad (32, 24)$$

Weitere Beziehungen zwischen der Mechanik des Kontinuums und der des Massenpunktes werden wir im nächsten Kapitel aus der Formulierung der für ein Kontinuum geltenden Erhaltungssätze ableiten.

Kapitel V DIE ERHALTUNGSSÄTZE

§ 33. Der Energie-Impulssatz

Die Erhaltung von Impuls und Energie haben wir für ein System von Massenpunkten, welche miteinander nur durch Stöße wechselwirken, in § 12 behandelt und durch die Gleichung (12, 3) ausgedrückt. In diesem Kapitel werden wir uns mit den Erhaltungssätzen in der Mechanik des Kontinuums beschäftigen. Dabei werden wir uns nicht auf die Erhaltung von Impuls und Energie beschränken, sondern auch den Erhaltungssatz für den Drehimpuls und den Schwerpunktsatz betrachten. Anschließend werden wir den Übergang von der Mechanik des Kontinuums zu der des Massenpunktes allgemein durchführen.

Wir beginnen mit der Erhaltung von Impuls und Energie. Bei unseren Betrachtungen gehen wir von der Grundgleichung (31, 1) des Kontinuums aus:

$$\sum_e \frac{\partial T_{\lambda e}}{\partial x_e} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3). \quad (33, 1)$$

Wir nehmen also an, den Ausführungen des § 31 entsprechend, daß

1. das betrachtete System nicht mit anderen Körpern wechselwirkt und
2. eventuelle Wechselwirkungen zwischen Teilen des betrachteten Systems durch einen entsprechenden Beitrag in $T_{\lambda e}$ schon berücksichtigt sind.

Gleichung (33, 1) drückt die Erhaltung des Impulses und der Energie in differentieller Form aus. Betrachten wir nämlich ein gegebenes, im Raum festgehaltenes Volumelement dV und multiplizieren wir Gleichung (33, 1) mit dV , so ergibt sich für $\lambda = 1$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{1k}}{\partial x_k} dV + \frac{\partial T_{10}}{\partial x_0} dV = 0.$$

Also nach (29, 5) und (9, 3):

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{1k}}{\partial x_k} dV + \frac{\partial g_1}{\partial t} dV = 0. \quad (33, 2)$$

In dieser Gleichung bedeutet der erste Term nach der in § 27 gegebenen Deutung von p_{ik} den aus der Oberfläche von dV pro Zeiteinheit herausströmenden Impuls in Richtung x_1 , während der zweite Term die Änderung

des in dV enthaltenen Impulses dieser Richtung ausdrückt. Gleichung (33, 2) besagt also, daß im Volumen dV Impuls in Richtung x_1 weder erzeugt noch vernichtet wird. Mit anderen Worten ist durch Gleichung (33, 2) die Erhaltung der in dV enthaltenen, zur x_1 -Achse parallelen Komponente des Impulses ausgedrückt. Ähnlich stellen die $\lambda = 2, 3$ entsprechenden Gleichungen (33, 1) die differentielle Form des Erhaltungssatzes für die zwei anderen Komponenten des Impulses dar. Für $\lambda = 0$ findet man aus (33, 1), unter Beachtung von (29, 5), (30, 7) und (30, 5),

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial S_k}{\partial x_k} dV + \frac{\partial W}{\partial t} dV = 0, \quad (33, 3)$$

was die Erhaltung der in dV enthaltenen Energie zum Ausdruck bringt.

Die Gleichungen (33, 2) und (33, 3) lassen sich auch für ein endliches, ebenfalls im Raum festgehaltenes Volumen V verallgemeinern. Es genügt dazu, diese Gleichungen über das Volumen V zu integrieren. Dabei müssen wir aber auf eine wichtige Einzelheit achten. Die Beziehungen (33, 2) und (33, 3) gelten für jeden Zeitpunkt t . Dementsprechend könnten wir bei der Durchführung der Integration über das Volumen V die Beziehungen (33, 2) und (33, 3) an den verschiedenen Volumenelementen dV für verschiedene, beliebig gewählte Zeitpunkte nehmen. Ein solches Verfahren wäre aber für unseren Zweck unnötig kompliziert. Es genügt, wenn wir in den Beziehungen (33, 2) und (33, 3) für alle Elemente dV von V denselben Zeitpunkt t wählen, d. h., wenn wir die Volumintegration für $t = \text{const}$ durchführen. Diese Tatsache läßt sich in der 4-dimensionalen Sprache besonders elegant formulieren. Dort ist nämlich $t = \text{const}$ bzw. $x_0 = \text{const}$ die Gleichung einer (3-dimensionalen) *Hyperebene* des 4-dimensionalen MINKOWSKISCHEN Raumes. Diese Hyperebene wird durch die übrigen Koordinaten x_1, x_2, x_3 beschrieben und stimmt daher mit dem gewöhnlichen 3-dimensionalen Raum überein. Am einfachsten werden wir also sagen, daß wir die Gleichungen (33, 2) und (33, 3) auf der Hyperebene $t = \text{const}$ integrieren. Da wir es in allen Ausführungen dieses Kapitels nur mit solchen Volumintegralen zu tun haben werden, dürfen wir auf die Verwendung einer besonderen Bezeichnung, welche an die Bedingung $t = \text{const}$ erinnert, verzichten. Wir werden also für das Integral von (33, 2) über V bei $t = \text{const}$ einfach schreiben:

$$\int_V \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{1k}}{\partial x_k} dV + \int_V \frac{\partial g_1}{\partial t} dV = 0. \quad (33, 4)$$

Der erste Term von (33, 4) läßt sich nach dem GAUSSschen Satz in ein Integral über die das Volumen V begrenzende Fläche S verwandeln:

$$\int_V \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{1k}}{\partial x_k} dV = \int_S \sum_{k=1}^3 p_{1k} n_k dS,$$

wobei n_k die Komponenten des zum Flächenelement dS senkrechten, nach außen hin gerichteten Einheitsvektors sind. Den zweiten Term von (33, 4) kann man auch so schreiben:

$$\int_V \frac{\partial g_1}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \int_V g_1 dV.$$

Die Richtigkeit dieser Umformung folgt unmittelbar aus der Bemerkung, daß wir unbewegte Volumenelemente dV betrachten, so daß neben der Zeitunabhängigkeit von dV selbst auch die Beziehung

$$\frac{d g_1}{dt} = \frac{\partial g_1}{\partial t}$$

gilt. Gleichung (33, 4) nimmt also die Form an

$$\frac{d}{dt} \int_V g_1 dV + \int_S \sum_{k=1}^3 p_{1k} n_k dS = 0. \quad (33, 5)$$

Bedenkt man aber, daß das Integral $\int_V g_1 dV$ der in V enthaltene Impuls in Richtung x_1 ist, während das Flächenintegral in (33, 5) den aus V pro Zeiteinheit herausströmenden Impuls derselben Richtung bedeutet, so sieht man, daß Gleichung (33, 5) tatsächlich die Erhaltung der zur x_1 -Achse parallelen Komponente des Impulses für das Volumen V ausdrückt. Ähnlich folgen aus den zwei weiteren, den Werten $\lambda=2$ und 3 entsprechenden Gleichungen der Form (33, 4) die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V g_2 dV + \int_S \sum_{k=1}^3 p_{2k} n_k dS &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_V g_3 dV + \int_S \sum_{k=1}^3 p_{3k} n_k dS &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (33, 6)$$

welche die Erhaltung der beiden anderen Impulskomponenten ausdrücken. Die Integration von (33, 3) ergibt mit Hilfe derselben Umformungen:

$$\frac{d}{dt} \int_V W dV + \int_S \sum_{k=1}^3 S_k n_k dS = 0. \quad (33, 7)$$

Diese Beziehung drückt die Erhaltung der in V enthaltenen Energie aus.

Im Falle eines materiellen Kontinuums kann man neben dem festgehaltenen infinitesimalen bzw. endlichen Volumen auch ein mit der Materie bewegtes

Volumen betrachten. Zur Unterscheidung von dem eben betrachteten, im Raum festgehaltenen Volumen V wollen wir das mit der Materie bewegte Volumen mit (V) bezeichnen. Wir werden zeigen, daß auch für das mitbewegte Volumen (V) zu (33, 5) und (33, 6) ähnliche Beziehungen gelten. Wir gehen von dem für einen gegebenen Zeitpunkt t berechneten Volumintegral $\int_{(V)} g_i dV$ ($i = 1, 2, 3$) aus, dessen Wert von der Zeit t abhängen wird.

Um die Ableitung $\frac{d}{dt} \int_{(V)} g_i dV$ auszurechnen, denken wir uns vorläufig das Integral durch eine Summe ersetzt:

$$\int_{(V)} g_i dV = \sum_{(V)} g_i \delta V.$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} g_i dV = \sum_{(V)} \left[\frac{dg_i}{dt} \delta V + g_i \frac{d}{dt} (\delta V) \right].$$

Für $\frac{dg_i}{dt}$ und $\frac{d}{dt} (\delta V)$ müssen wir jetzt die Werte (28, 5) und (28, 7) einsetzen, da sich das Volumelement δV mit der Materie bewegt. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} g_i dV &= \sum_{(V)} \left[\frac{\partial g_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial x_k} q_k + g_i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \right] \delta V \\ &= \sum_{(V)} \left[\frac{\partial g_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (g_i q_k) \right] \delta V. \end{aligned} \quad (33, 8)$$

Beachten wir noch, daß nach (33, 2)

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}$$

ist, so folgt aus (33, 8)

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} g_i dV = \sum_{(V)} \left[\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (-p_{ik} + g_i q_k) \right] \delta V.$$

Also wegen (27, 2)

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} g_i dV = - \sum_{(V)} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right) dV.$$

Wir gehen jetzt von der Summe $\sum_{(V)}$ zum Integral zurück:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} g_i dV = - \int_{(V)} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV.$$

Die Umformung der rechten Seite nach dem GAUSSschen Satz ergibt

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} g_i dV = - \int_{(S)} \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} n_k dS. \quad (33, 9)$$

Dies ist die zu (33, 5) und (33, 6) analoge, für das mitbewegte Volumen (V) geltende Beziehung. Der Unterschied zwischen (33, 5), (33, 6) und (33, 9) besteht darin, daß in den ersten Beziehungen die verallgemeinerten Spannungen p_{ik} , in (33, 9) dagegen die eigentlichen Spannungen σ_{ik} verwendet werden. Die Beziehung (33, 9) läßt eine besonders einfache Deutung zu. Die rechte Seite von (33, 9) stellt nämlich die auf die in (V) enthaltene Materie wirkende Gesamtkraft dar. Daher ist (33, 9) die zu (13, 2) analoge Bewegungsgleichung der im Volumen (V) enthaltenen Materie.

Aus den Gleichungen (33, 5) bis (33, 7) kann man unmittelbar den integralen Erhaltungssatz von Impuls und Energie in seiner gewöhnlichen Form ableiten. Wir brauchen nur anzunehmen, daß das Kontinuum einen endlichen Bereich des 3-dimensionalen Raumes erfüllt. Wir nehmen also ähnlich wie in § 32 an, daß es eine geschlossene, im Endlichen verlaufende Fläche S_0 gibt, so daß im Äußeren von S_0 sämtliche Komponenten $T_{\lambda\mu}$ verschwinden. Erstrecken wir dann die Integration in (33, 5), (33, 6) und (33, 7) über die ganze Ausdehnung des Kontinuums, d. h., wählen wir das Volumen V so groß, daß es die ganze Fläche S_0 in seinem Innern enthält, so werden in diesen Formeln die Flächenintegrale identisch verschwinden. Die Formeln reduzieren sich also auf

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int g_i dV &= 0 & (i=1, 2, 3), \\ \frac{d}{dt} \int W dV &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (33, 10)$$

Das Integral $\int g_i dV$ stellt offenbar den Gesamtimpuls p_i des Kontinuums dar:

$$\int g_i dV = p_i \quad (i=1, 2, 3). \quad (33, 11)$$

Ähnlich ist das Integral $\int W dV$ gleich der Gesamtenergie des betrachteten Kontinuums:

$$\int W dV = E. \quad (33, 12)$$

Die Gleichungen (33, 10) lassen sich also auch so schreiben:

$$p_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (33, 13)$$

$$E = \text{const}, \quad (33, 14)$$

und drücken dann den Energie-Impulssatz in seiner gewöhnlichen Form aus¹⁾.

§ 34. Der Drehimpulssatz

Bei der Definition des Drehimpulses gehen wir auch in der speziellen Relativitätstheorie ähnlich wie in der Newtonschen Mechanik vor. Zunächst werden wir einen Bezugspunkt für die Berechnung der Momente der Impulsverteilung wählen. Dieser Bezugspunkt kann beliebig gewählt werden. Nach getroffener Wahl muß man ihn aber festhalten, so daß seine Koordinaten, die wir mit ξ_i ($i = 1, 2, 3$) bezeichnen wollen, im Laufe der Zeit konstant bleiben. Wir betrachten ein Volumelement dV , dessen Ort im 3-dimensionalen Raum durch den Punkt mit den Koordinaten x_i ($i = 1, 2, 3$) festgelegt ist. Bezeichnen wir die Impulsdichte an dieser Stelle mit g und setzen wir

$$l_i = x_i - \xi_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (34, 1)$$

so wird der Drehimpuls der im Volumelement dV enthaltenen Materie gleich dem Vektorprodukt des 3-dimensionalen Vektors l (dessen Komponenten $l_x = l_1$, $l_y = l_2$ und $l_z = l_3$ sind) mit $g dV$:

$$d\mathfrak{J} = [lg] dV. \quad (34, 2)$$

Für ein endliches Volumen V werden wir den Ausdruck (34, 2) unter der Bedingung $t = \text{const}$ integrieren:

$$\mathfrak{J} = \int_V [lg] dV. \quad (34, 3)$$

Diese Definition gilt ohne jede Änderung sowohl in der Newtonschen Mechanik als auch in der speziellen Relativitätstheorie. Man muß nur darauf achten, daß in der speziellen Relativitätstheorie die Komponenten der Impulsdichte g nach (29, 5) durch

$$g_k = \frac{1}{ic} T_{k0} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (34, 4)$$

gegeben werden.

¹⁾ Ist dem materiellen Kontinuum noch ein Feldkontinuum überlagert, so wird es dann im allgemeinen keine Fläche S_0 geben, außerhalb deren $T_{\lambda\mu}$ streng gleich Null wird. Trotzdem werden auch in diesem Fall die Erhaltungssätze (33, 13) und (33, 14) gelten, wenn $T_{\lambda\mu}$ außerhalb einer Fläche S_0 so schnell gegen Null strebt, daß die Volumintegrale von g_i und W für $V \rightarrow \infty$ konvergieren und dabei die in (33, 5) bis (33, 7) erscheinenden Flächenintegrale gegen Null streben. Dies ist z. B. dann erfüllt, wenn wir es mit elektrisch geladener Materie zu tun haben, die ein elektrostatisches Feld erzeugt

Die zeitliche Ableitung des im Volumen V enthaltenen Drehimpulses läßt sich mit Hilfe der Grundgleichung (33, 1) des Kontinuums bestimmen. Betrachten wir zunächst ein im Raum festgehaltenes Volumen V , so folgt z. B. für die Komponente J_z des Drehimpulses

$$\begin{aligned}\frac{dJ_z}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V (l_1 g_2 - l_2 g_1) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (l_1 g_2 - l_2 g_1) dV \\ &= \int_V \left(l_1 \frac{\partial g_2}{\partial t} - l_2 \frac{\partial g_1}{\partial t} \right) dV.\end{aligned}\quad (34, 5)$$

Der in der Klammer des letzten Integrals stehende Ausdruck läßt sich mit Hilfe von (33, 1) umformen. Man findet durch eine einfache Rechnung

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (l_1 p_{2k} - l_2 p_{1k}) \\ = l_1 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{2k}}{\partial x_k} - l_2 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{1k}}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial l_1}{\partial x_k} p_{2k} - \frac{\partial l_2}{\partial x_k} p_{1k} \right).\end{aligned}$$

Für den Wert von $\sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}$ findet man aus (33, 1) und (29, 5)

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} = - \frac{\partial g_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ferner folgt aus (34, 1), da die Koordinaten ξ_i des Bezugspunktes Konstanten sind,

$$\frac{\partial l_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (l_1 p_{2k} - l_2 p_{1k}) = - \left(l_1 \frac{\partial g_2}{\partial t} - l_2 \frac{\partial g_1}{\partial t} \right) + (p_{21} - p_{12}).$$

Der letzte Term entfällt wegen der Symmetrieeigenschaft (27, 4) von p_{ik} . Es wird also

$$l_1 \frac{\partial g_2}{\partial t} - l_2 \frac{\partial g_1}{\partial t} = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (l_1 p_{2k} - l_2 p_{1k}). \quad (34, 6)$$

Setzt man die rechte Seite von (34, 6) in (34, 5) ein, so ergibt sich nach Anwendung des GAUSSschen Satzes

$$\frac{dJ_z}{dt} = - \int_S \sum_{k=1}^3 (l_1 p_{2k} - l_2 p_{1k}) n_k dS. \quad (34, 7)$$

Eine zu (34, 7) ähnliche Formel läßt sich auch für den Fall eines mit der Materie bewegten Volumens (V) ableiten. Die Rechnung wird in diesem Fall der zu (33, 9) führenden ähnlich. Ist f eine beliebige Funktion der Zeit t und der Raumkoordinaten x_i ($i = 1, 2, 3$), so gilt die Beziehung

$$-\frac{d}{dt} \int_{(V)} f dV = \int_{(V)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (f q_k) \right] dV. \quad (34, 8)$$

Der Beweis verläuft ganz ähnlich wie bei der Ableitung der Formel (33, 8). Setzt man nun

$$f = l_1 g_2 - l_2 g_1$$

und beachtet, daß

$$\frac{\partial f}{\partial t} = l_1 \frac{\partial g_2}{\partial t} - l_2 \frac{\partial g_1}{\partial t}$$

ist, so ergibt sich aus (34, 8) unter Berücksichtigung von (34, 6)

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} (l_1 g_2 - l_2 g_1) dV = - \int_{(V)} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} [l_1 p_{2k} - l_2 p_{1k} - l_1 g_2 q_k + l_2 g_1 q_k] dV.$$

Daher ist wegen (27, 2)

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} (l_1 g_2 - l_2 g_1) dV = - \int_{(V)} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (l_1 \sigma_{2k} - l_2 \sigma_{1k}) dV.$$

Mit Hilfe des GAUSSschen Satzes erhalten wir daraus:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} (l_1 g_2 - l_2 g_1) dV = - \int_{(S)} \sum_{k=1}^3 (l_1 \sigma_{2k} - l_2 \sigma_{1k}) n_k dS. \quad (34, 9)$$

Dies ist dieselbe Beziehung wie (34, 7), mit dem einzigen Unterschied, daß jetzt die eigentlichen Spannungen σ_{ik} an die Stelle von p_{ik} treten. Die Beziehung (34, 9) kann man ähnlich wie in der NEWTONschen Mechanik deuten. Die

rechte Seite von (34, 9) stellt nämlich das Gesamtmoment der auf die im Volumen (V) enthaltenen Materie wirkenden Kräfte dar. Die Beziehung (34, 9) besagt also, daß die Änderungsgeschwindigkeit des Drehimpulses gleich dem Moment der äußeren Kräfte ist.

Haben wir es mit einem Kontinuum zu tun, das nur einen endlichen Bereich des 3-dimensionalen Raumes erfüllt, so folgt entweder aus (34, 7) oder aus (34, 9) der Drehimpulssatz in seiner gewöhnlichen Form. Wählen wir nämlich in (34, 7) das Integrationsgebiet V so groß, daß es die ganze Fläche S_0 in seinem Innern enthält, dann verschwindet das Flächenintegral identisch und es bleibt

$$\frac{dJ_z}{dt} = 0. \quad (34, 10)$$

Ähnlich beweist man auch die zwei weiteren Beziehungen

$$\frac{dJ_x}{dt} = 0, \quad \frac{dJ_y}{dt} = 0. \quad (34, 11)$$

Der Gesamtdrehimpuls eines von seiner Umgebung isolierten Kontinuums bleibt also konstant:

$$\mathfrak{J} = \int [I\mathfrak{g}] dV = \text{const.} \quad (34, 12)$$

§ 35. Der Schwerpunktsatz

In der NEWTONschen Mechanik definiert man den Schwerpunkt der im mitbewegten Volumen (V) enthaltenen Materie durch die Beziehung

$$\int_{(V)} x_i \varrho dV = X_i \int_{(V)} \varrho dV \quad (i = 1, 2, 3). \quad (35, 1)$$

Die sich aus dieser Beziehung ergebenden Werte X_i sind die Koordinaten des Schwerpunktes. Eine besonders wichtige Rolle spielt der Schwerpunkt des gesamten materiellen Systems. Dieser wird wieder durch die Beziehung (35, 1) definiert, wenn man als Integrationsbereich (V) das Volumen des ganzen Systems nimmt. Für den Schwerpunkt des gesamten Systems gilt der Schwerpunktsatz der NEWTONschen Mechanik: Der Schwerpunkt eines isolierten Systems bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

Der Begriff des Schwerpunktes läßt sich auch in die spezielle Relativitätstheorie übertragen. Und zwar wird man dabei wieder von der Definitionsgleichung (35, 1) der NEWTONschen Mechanik ausgehen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß jetzt ϱ nicht mehr die Massendichte der NEWTONschen Mechanik bedeutet, sondern nach (30, 4) die durch c^2 dividierte Energiedichte darstellt. In Wirklichkeit enthält also die Definitionsgleichung des Schwerpunktes in der speziellen Relativitätstheorie die Energiedichte W :

$$\int x_i W dV = X_i \int W dV \quad (i = 1, 2, 3). \quad (35, 2)$$

Streng genommen sollte man, dieser Definition entsprechend, den Punkt mit den Koordinaten X_i als den Energiemittelpunkt des Systems bezeichnen. Man macht aber von dieser Bezeichnung nur selten Gebrauch — ähnlich wie man in der Newtonschen Mechanik von dem durch die Beziehung (35, 1) definierten Punkt nur selten als von dem Massenmittelpunkt spricht —, da sich der Ausdruck „Schwerpunkt“ durch den langen Gebrauch völlig durchgesetzt hat.

Wir werden jetzt zeigen, daß auch in der Relativitätstheorie für den durch (35, 2) definierten Schwerpunkt eines isolierten Systems der von der Newtonschen Mechanik her bekannte Schwerpunktsatz unverändert gilt. Wir bemerken zunächst, daß die Integrale in (35, 2) nach der allgemeinen Vereinbarung von § 33 für $t = \text{const}$ zu berechnen sind. Daher werden diese Integrale, und infolgedessen auch die X_i , nur von t abhängen können. Differenzieren wir aber Gleichung (35, 2) nach t , so folgt unter Beachtung von (33, 14), wonach das Integral der rechten Seite konstant und gleich der Gesamtenergie E ist, daß

$$\frac{d}{dt} \int x_i W dV = E \frac{dX_i}{dt}.$$

Zur Ausrechnung der auf der linken Seite stehenden Ableitung wollen wir uns die Volumenelemente dV im Raum festgehalten denken. Dann sind auch die Koordinaten x_i von der Zeit unabhängig, während

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t}$$

wird. Also

$$\int x_i \frac{\partial W}{\partial t} dV = E \frac{dX_i}{dt}. \quad (35, 3)$$

Nun folgt aus (30, 6)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -c^2 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_k}{\partial x_k}.$$

Daher ist

$$x_i \frac{\partial W}{\partial t} = -c^2 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i g_k) + c^2 g_i.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (35, 3) ein, so folgt

$$-c^2 \int x_i \sum_{k=1}^3 g_k n_k dS + c^2 \int g_i dV = E \frac{dX_i}{dt}.$$

Das Flächenintegral wird aber identisch gleich Null, da wir ein endlich ausgedehntes System vorausgesetzt haben und daher g_k auf der Integrations-

fläche verschwindet. Beachten wir noch, daß nach (33, 11) das Integral $\int g_i dV$ gleich dem Gesamtimpuls p_i des Systems ist, so wird schließlich

$$p_i = \frac{E}{c^2} \frac{dX_i}{dt} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (35, 4)$$

Da nach (33, 13) auch der Impuls p_i konstant ist, so folgt aus (35, 4), daß $\frac{dX_i}{dt}$ konstant ist. Die Beziehung (35, 4) stellt die genaue Formulierung des Schwerpunktsatzes dar.

In der NEWTONschen Mechanik lautet die quantitative Formulierung des Schwerpunktsatzes

$$p_i = m \frac{dX_i}{dt}, \quad (35, 5)$$

wobei $m = \int \rho dV$ die Gesamtmasse des Systems bedeutet. Die relativistische Formulierung (35, 4) geht aus der NEWTONschen (35, 5) mit Hilfe der in der relativistischen Dynamik des Massenpunktes abgeleiteten Beziehung (14, 9),

$$m = \frac{E}{c^2},$$

hervor. Ferner zeigt die Beziehung (35, 4) eine weitgehende Ähnlichkeit zu der für einen Massenpunkt geltenden Formel (14, 12),

$$p_i = \frac{E}{c^2} q_i.$$

Dabei entspricht der Geschwindigkeit q_i des Massenpunktes die Geschwindigkeit $\frac{dX_i}{dt}$ des Schwerpunktes des ausgedehnten Systems. Diese Bemerkungen zeigen, daß es ein enges Verhältnis zwischen der Mechanik des Kontinuums und der des Massenpunktes gibt. Wir werden dieses Verhältnis in den folgenden Abschnitten und insbesondere in § 38 weiter diskutieren und genauer kennenlernen.

§ 36. Transformationseigenschaften. Die Invarianz der Ladung

Die Gleichungen (33, 13) und (33, 14), welche die Erhaltung von Impuls und Energie in einem Kontinuum ausdrücken, sind von genau derselben Form wie die entsprechenden in der Dynamik des Massenpunktes geltenden Beziehungen. Die Analogie zwischen Kontinuum und Massenpunkt geht aber noch weiter. In § 12 haben wir gesehen, daß im Falle des Massenpunktes die drei Impulskomponenten und die Energie die wichtige durch (12, 2) ausgedrückte Eigenschaft haben, die Komponenten eines Vektors

des MINKOWSKISCHEN Raumes zu sein. Wir werden in den folgenden Abschnitten zeigen, daß dieser Satz auch für das Kontinuum gilt: Bei LORENTZ-Transformationen verhalten sich die durch (33, 11) und (33, 12) gegebenen Größen p_i und $p_4 = \frac{E}{c}$ wie die Komponenten eines Vierervektors. Anschließend werden wir auch die Transformationseigenschaften des Drehimpulses und des Schwerpunktes untersuchen und die entsprechenden Transformationsformeln aufstellen.

In diesem Abschnitt werden wir einen Satz beweisen, der die mathematische Grundlage für die Ableitung der Transformationseigenschaften sowohl von Impuls und Energie als auch von Drehimpuls und Schwerpunkt bildet. Dieser Satz hängt mit der Kontinuitätsgleichung (20, 6) der Elektrodynamik zusammen,

$$\frac{\partial \rho}{c \partial t} + \operatorname{div} s = 0, \quad (36, 1)$$

und drückt, wie wir weiter unten sehen werden, eine wichtige Eigenschaft der Gesamtladung des Systems aus. Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir annehmen, daß die Materie, die die elektrischen Ströme und die Ladung trägt, nur einen endlichen Bereich des 3-dimensionalen Raumes erfüllt.

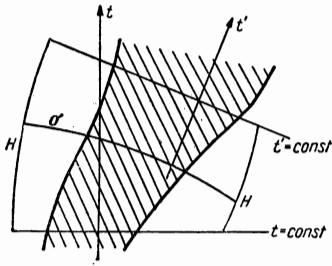


Fig. 13.

Diesen Sachverhalt soll die Fig. 13 veranschaulichen. Wir nehmen an, daß der 4-dimensionale Vektor s_k , der nach (20, 9) die Strom- und Ladungsdichte vereinigt, außerhalb des in Fig. 13 schraffierten Gebietes des 4-dimensionalen Raumes verschwindet. Dabei soll dieses Gebiet so beschaffen sein, daß es auf jeder Hyperebene $t = \text{const}$ einen endlichen Querschnitt liefert.

Integrieren wir die Beziehung (36, 1) auf der Hyperebene $t = \text{const}$, so folgt

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + c \int \operatorname{div} s dV = 0.$$

Diese Beziehung läßt sich ähnlich wie in § 33 umformen und ergibt

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV + c \int \sum_{k=1}^3 s_k n_k dS = 0.$$

Erstreckt sich also die Integration über die gesamte Ausdehnung der Strom- und Ladungsverteilung, so wird das Flächenintegral verschwinden und es bleibt

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = 0. \quad (36, 2)$$

Das in dieser Beziehung auftretende Integral ist die Gesamtladung e des Systems:

$$e = \int \varrho dV. \quad (36, 2)$$

Die Beziehung (36, 2) besagt also, daß die Ladung e konstant bleibt,

$$e = \text{const}, \quad (36, 3)$$

d. h., daß die Integration von ϱ auf irgendeiner Hyperebene $t = \text{const}$ immer den gleichen Wert e liefert.

Gehen wir durch eine beliebige LORENTZ-Transformation zu dem neuen Koordinatensystem x'_μ über — dessen Zeitachse in Fig. 13 mit t' bezeichnet wurde —, so läßt sich die vorige Beweisführung im Koordinatensystem x'_μ wiederholen. Das Ergebnis lautet

$$\frac{d}{dt'} \int \varrho' dV' = 0.$$

Setzen wir also

$$e' = \int \varrho' dV', \quad (36, 4)$$

so wird auch im Koordinatensystem x'_μ der Wert e' unabhängig von t' :

$$e' = \text{const}. \quad (36, 5)$$

Wir werden nun beweisen, daß die Werte e und e' einander gleich sind,

$$e = e', \quad (36, 6)$$

d. h., daß die Gesamtladung des Systems eine LORENTZ-invariante Größe ist. Den Beweis werden wir mit Hilfe der 4-dimensionalen Verallgemeinerung des GAUSSschen Satzes erbringen. Diese entsteht aus der 3-dimensionalen Form,

$$\int \text{div } \mathfrak{A} dV = \int (\mathfrak{A} \mathfrak{n}) dS,$$

wenn wir sämtliche darin erscheinenden Größen durch die entsprechenden 4-dimensionalen Größen ersetzen. Wir werden also von einem 4-dimensionalen

Vektorfeld A_λ ausgehen und $\text{div } \mathfrak{A}$ durch $\sum_\lambda \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\lambda}$ ersetzen. Ferner werden

wir die Volumintegration in einem Bereich des 4-dimensionalen Raumes ausführen und daher an Stelle von dV das 4-dimensionale Volumelement $d\omega$ verwenden. Die rechte Seite wird dann zu einem Integral auf der Hyperfläche, die den betrachteten 4-dimensionalen Bereich begrenzt. An Stelle von $\mathfrak{n} dS$ werden wir also den 4-dimensionalen Vektor $d\sigma_\lambda$ verwenden, dessen Komponenten gleich der Projektionen des Hyperflächenelementes auf die

vier fundamentalen Hyperebenen des verwendeten Koordinatensystems sind. Der 4-dimensionale GAUSSsche Satz lautet also

$$\int \sum_{\lambda} \frac{\partial A_{\lambda}}{\partial x_{\lambda}} d\omega = \int \sum_{\lambda} A_{\lambda} d\sigma_{\lambda}. \quad (36, 8)$$

Wir wenden diesen Satz für

$$A_{\lambda} = s_{\lambda}$$

an, wobei s_{λ} der 4-dimensionale Strom-Ladungsvektor (20, 9) ist. Als Integrationsbereich wählen wir das in Fig. 13 zwischen den Hyperebenen $t = \text{const}$ und $t' = \text{const}$ und der Seitenfläche H enthaltene Gebiet. Beachten wir, daß nach (21, 11)

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial s_{\lambda}}{\partial x_{\lambda}} = 0$$

ist, so folgt aus (36, 8)

$$\int \sum_{\lambda} s_{\lambda} d\sigma_{\lambda} = 0.$$

Dieses Integral läßt sich in drei Teile zerlegen, die den Hyperebenen $t = \text{const}$ und $t' = \text{const}$ und der Hyperfläche H entsprechen. Da aber H außerhalb des schraffierten Gebietes liegt und daher auf ihr $s_{\lambda} = 0$ ist, verschwindet der dritte Term identisch. Es bleibt also

$$\int_{t=\text{const}} \sum_{\lambda} s_{\lambda} d\sigma_{\lambda} + \int_{t'=\text{const}} \sum_{\lambda} s_{\lambda} d\sigma_{\lambda} = 0. \quad (36, 9)$$

Da s_{λ} und $d\sigma_{\lambda}$ beide Vektoren sind, ist der in (36, 9) unter dem Integrationszeichen stehende Ausdruck eine skalare Größe, die also denselben Wert in allen Koordinatensystemen hat. Man darf daher bei der Durchführung der Integration ein spezielles Koordinatensystem wählen, so daß sich dadurch die Rechnung möglichst vereinfacht. Beim ersten Integral wird dies das Koordinatensystem x_{μ} mit der Zeitkoordinate $x_0 = ict$ sein (in Fig. 13 Zeitachse t). Dann stimmt nämlich die Integrationsfläche $t = \text{const}$ mit der Koordinatenebene (x_1, x_2, x_3) überein. Daher wird

$$d\sigma_1 = d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0.$$

Die vierte Komponente $d\sigma_4$ wird dem Betrage nach gleich dem 3-dimensionalen Volumelement dV . Ferner sieht man in Fig. 13, daß die in bezug auf das 4-dimensionale Integrationsgebiet äußere Normale der Hyperebene $t = \text{const}$ zur Zeitachse entgegengesetzt gerichtet ist. Es wird also

$$d\sigma_4 = -dV.$$

Daraus folgt

$$\int_{t=\text{const}} \sum_{\lambda} s_{\lambda} d\sigma_{\lambda} = -\int s_4 dV. \quad (36, 10)$$

Für die Ausrechnung des zweiten Integrals in (36, 9) eignet sich am besten das Koordinatensystem x'_μ mit der Zeitkoordinate $x'_0 = ic t'$ (in Fig. 13 Zeitachse t'). Dieselbe Beweisführung läßt sich dann für das Koordinatensystem x'_μ wiederholen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die äußere Normale der Hyperebene $t' = \text{const}$ die Richtung der Zeitachse t' hat. Es wird also

$$d\sigma'_4 = dV'$$

und daher

$$\int_{t'=\text{const}} \sum_{\lambda} s_{\lambda} d\sigma_{\lambda} = \int s'_4 dV'. \quad (36, 11)$$

Setzen wir (36, 10) und (36, 11) in (36, 9) ein, so ergibt sich

$$\int s_4 dV = \int s'_4 dV', \quad (36, 12)$$

was wegen $s_4 = \rho$ und $s'_4 = \rho'$ mit der Beziehung (36, 7) übereinstimmt.

Wir werden noch eine Beziehung ableiten, welche die Gesamtladung e in Form eines Integrals über eine allgemeine Hyperfläche σ angibt (Fig. 13). Dabei darf σ beliebig sein und muß nur der Bedingung genügen, daß sie für das schraffierte Gebiet einen endlichen Querschnitt liefert. Wählen wir dann als Integrationsgebiet im GAUSSschen Satz (36, 8) den durch die Hyperfläche $t = \text{const}$, σ und H begrenzten Bereich, so ergibt sich

$$e = \int_{\sigma} \sum_{\lambda} s_{\lambda} d\sigma_{\lambda}. \quad (36, 13)$$

Diese Formel ist offenbar für die praktische Ausrechnung von e unbequem und wird deshalb nur bei allgemeinen theoretischen Betrachtungen gebraucht¹⁾.

§ 37. Der Energie-Impulsvektor

Den Ausgangspunkt bildet hier die Grundgleichung (31, 1) der Mechanik des Kontinuums:

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial T_{e\lambda}}{\partial x_{\lambda}} = 0. \quad (37, 1)$$

¹⁾ In dieser Formel werden im allgemeinen alle vier Komponenten $d\sigma_{\lambda}$ von Null verschieden sein, so daß für ihre Verwendung die genaue Definition von $d\sigma_{\lambda}$ benötigt wird. Wir wollen diese Definition hier kurz andeuten. Das Element $d\sigma$ von σ sei durch die drei voneinander unabhängigen Vektoren dA_{λ} , dB_{λ} , dC_{λ} definiert. (Als Hyperfläche eines 4-dimensionalen Raumes ist σ 3-dimensional.) Bilden wir nun die Determinanten

$$d\sigma_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} dA_{\lambda} & dA_{\mu} & dA_{\nu} \\ dB_{\lambda} & dB_{\mu} & dB_{\nu} \\ dC_{\lambda} & dC_{\mu} & dC_{\nu} \end{vmatrix},$$

so ist $d\sigma_{\lambda\mu\nu}$ nach den Ausführungen von § 18 ein Tensor der Stufe 3. Dieser Tensor ist offensichtlich in allen Indexpaaren antisymmetrisch und daher einem Vektor äquivalent (vgl. § 19). Das ist der Vektor, den wir in (36, 8) mit $d\sigma_{\lambda}$ bezeichnet haben. Die genaue Zuordnung von $d\sigma_{\lambda}$ und $d\sigma_{\lambda\mu\nu}$ lautet

$$d\sigma_4 = d\sigma_{123}, \quad d\sigma_1 = -d\sigma_{234}, \quad d\sigma_2 = d\sigma_{341}, \quad d\sigma_3 = -d\sigma_{412}.$$

Diese unterscheidet sich von der Gleichung (21, 11) durch den zusätzlichen Index ϱ . Um die Vektorgleichung (37, 1) auf die skalare (21, 11) zurückzuführen, multiplizieren wir sie zunächst skalar mit einem weiteren Vektor B_ϱ :

$$\sum_{\lambda} B_\varrho \frac{\partial T_{\varrho\lambda}}{\partial x_\lambda} = 0. \quad (37, 2)$$

Die linke Seite dieser Gleichung hat noch nicht die Form einer Divergenz, wie es in Gleichung (21, 11) der Fall ist. Wir können aber auch diesen Unterschied beseitigen, wenn wir ein homogenes Vektorfeld B_ϱ zu Hilfe nehmen. Ein solches Feld werden wir z. B. so definieren können, daß wir zunächst an einem gegebenen Punkt einen beliebigen Vektor B_ϱ wählen und anschließend den gleichen Vektor auch allen anderen Punkten des 4-dimensionalen Raumes zuordnen. Die Komponenten B_ϱ sind dann von den Koordinaten x_μ unabhängig:

$$\frac{\partial B_\varrho}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\varrho, \mu = 0, 1, 2, 3). \quad (37, 3)$$

In diesem Fall kann man die Beziehung (37, 2) auch so schreiben:

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left(\sum_{\varrho} B_\varrho T_{\varrho\lambda} \right) = 0. \quad (37, 4)$$

Die Beziehung (37, 4) ist tatsächlich von der Form (21, 11) mit

$$\sum_{\varrho} B_\varrho T_{\varrho\lambda} = s_\lambda. \quad (37, 5)$$

Und zwar wird s_λ nur in einem Gebiet von der Form des in Fig. 13 schraffiert gezeichneten von Null verschieden sein, wenn wir dies für $T_{\varrho\lambda}$ wie in § 33 annehmen. Wir dürfen also den Satz (36, 12) für den durch (37, 5) gegebenen Vektor s_λ anwenden. Daraus folgt

$$\int \sum_{\varrho} B_\varrho T_{\varrho 4} dV = \int \sum_{\varrho} B'_\varrho T'_{\varrho 4} dV'. \quad (37, 6)$$

Die in dieser Beziehung auftretenden Integrale kann man wegen (37, 3) sofort auf die durch (33, 11) und (33, 12) gegebenen Größen p_λ zurückführen. Aus der Konstanz von B_ϱ folgt nämlich auch die von B'_ϱ . Nimmt man aber die Faktoren B_ϱ, B'_ϱ aus den Integralen (37, 6) heraus, so folgt

$$\sum_{\varrho} B_\varrho \int T_{\varrho 4} dV = \sum_{\varrho} B'_\varrho \int T'_{\varrho 4} dV'.$$

Und da nach (33, 11) und (33, 12)

$$\begin{aligned} \int T_{\varrho 4} dV &= c p_\varrho & (c p_4 = E), \\ \int T'_{\varrho 4} dV' &= c p'_\varrho & (c p'_4 = E') \end{aligned} \quad (37, 7)$$

ist, wird schließlich

$$\sum_{\mathfrak{e}} B_{\mathfrak{e}} p_{\mathfrak{e}} = \sum_{\mathfrak{e}} B'_{\mathfrak{e}} p'_{\mathfrak{e}}. \quad (37, 8)$$

Aus der Beziehung (37, 8) folgt unmittelbar die Vektoreigenschaft von $p_{\mathfrak{e}}$. Da nämlich $B_{\mathfrak{e}}$ ein Vektor ist, gilt nach (18, 5)

$$B'_{\mathfrak{e}} = \sum_{\lambda} \alpha_{\mathfrak{e}\lambda} B_{\lambda}.$$

Führen wir diesen Wert in (37, 8) ein, so wird

$$\sum_{\mathfrak{e}} B_{\mathfrak{e}} p_{\mathfrak{e}} = \sum_{\mathfrak{e}\lambda} \alpha_{\mathfrak{e}\lambda} B_{\lambda} p'_{\mathfrak{e}} = \sum_{\mathfrak{e}\lambda} \alpha_{\lambda\mathfrak{e}} B_{\mathfrak{e}} p'_{\lambda}.$$

Oder

$$\sum_{\mathfrak{e}} B_{\mathfrak{e}} (p_{\mathfrak{e}} - \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda\mathfrak{e}} p'_{\lambda}) = 0. \quad (37, 8a)$$

Bedenkt man aber, daß $B_{\mathfrak{e}}$ ein beliebiger Vektor ist, d. h. daß die Werte der Komponenten $B_{\mathfrak{e}}$ beliebige Zahlen sind, so folgt aus (37, 8a), daß die Klammer selbst verschwinden muß:

$$p_{\mathfrak{e}} = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda\mathfrak{e}} p'_{\lambda}. \quad (37, 9)$$

Dies ist die Transformationsformel eines Vektors für die zu (9, 5) inverse LORENTZ-Transformation (9, 8). Man wird daraus zu der gewöhnlichen Transformationsformel (18, 5) geführt, wenn man (37, 9) mit $\alpha_{\mu\mathfrak{e}}$ multipliziert und über $\mathfrak{e}$ summiert:

$$\sum_{\mathfrak{e}} \alpha_{\mu\mathfrak{e}} p_{\mathfrak{e}} = \sum_{\lambda\mathfrak{e}} \alpha_{\mu\mathfrak{e}} \alpha_{\lambda\mathfrak{e}} p'_{\lambda} = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\mathfrak{e}} \alpha_{\mu\mathfrak{e}} \alpha_{\lambda\mathfrak{e}} \right) p'_{\lambda}.$$

Beachtet man (9, 9), so wird schließlich

$$p'_{\mu} = \sum_{\mathfrak{e}} \alpha_{\mu\mathfrak{e}} p_{\mathfrak{e}}. \quad (37, 10)$$

Damit haben wir gezeigt, daß auch in der Mechanik des Kontinuums wie in der des Massenpunktes die drei Komponenten des Gesamt-Impulses und die durch c dividierte Gesamtenergie einen Vierervektor bilden.

Wir geben noch eine Beziehung, welche die Größen p_{λ} als Integrale auf einer beliebigen Hyperfläche σ (Fig. 13) ausdrückt. Diese Beziehung folgt unmittelbar aus (36, 13), angewandt auf den durch (37, 5) gegebenen Vektor s_{λ} :

$$\int \sum_{\mathfrak{e}} B_{\mathfrak{e}} T_{\mathfrak{e}\lambda} dV = \int \sum_{\mathfrak{e}\lambda} B_{\mathfrak{e}} T_{\mathfrak{e}\lambda} d\sigma_{\lambda}.$$

Die letzte Formel läßt sich ähnlich wie Gleichung (37, 6) umformen und ergibt

$$\sum_e B_e \left(p_e - \int \sum_\lambda \frac{1}{c} T_{e\lambda} d\sigma_\lambda \right) = 0.$$

Da die B_e beliebige Zahlen sind, wird dies nur dann erfüllt, wenn die Klammer selbst verschwindet. Es gilt also die Beziehung

$$p_e = \frac{1}{c} \int \sum_\lambda T_{e\lambda} d\sigma_\lambda. \quad (37, 11)$$

§ 38. Kontinuum und Massenpunkt

In der makroskopischen Physik ist zweifellos der Begriff des Kontinuums dem des Massenpunktes gegenüber überlegen. Das Bewegungsgesetz (13, 2) gilt zunächst für endliche materielle Körper, solange man es mit einfachen Translationsbewegungen zu tun hat, bzw. wenn man von den Drehungen und Deformationen absieht. Dasselbe Gesetz gilt aber in der Form (28, 2) auch für einen Teil eines Kontinuums, unter der einzigen Bedingung, daß man auch die von den benachbarten Teilen ausgeübten Kraftwirkungen, mit anderen Worten die im Kontinuum wirkenden Spannungen, berücksichtigt. Erst später wurde der Begriff des Massenpunktes durch einen mathematischen Grenzübergang geschaffen. Nachdem man aber die atomistische Struktur der Materie mit Sicherheit nachweisen konnte, hat sich die Lage zugunsten des Begriffs des Massenpunktes verschoben. Man hat dann auch den umgekehrten Weg verfolgt und das Kontinuum auf ein System von Massenpunkten zurückgeführt, wie z. B. in der statistischen Gastheorie. Dieser neue Kontinuumsbegriff hat offenbar nur begrenzte Gültigkeit. In diesen Theorien darf man nämlich nur Volumelemente δV betrachten, die immer noch eine nicht zu kleine Anzahl von Atomen bzw. Molekülen enthalten. Im makroskopischen Maßstab sind diese Volumelemente äußerst klein und dürfen deshalb bei den meisten Problemen als unendlich klein betrachtet werden. Trotzdem ist es klar, daß es sich dabei keineswegs um das alte, streng gültige Kontinuum handelt.

Eine unmittelbare, auf die Erfahrung gestützte Bestätigung der absoluten Überlegenheit des Massenpunktbegriffs liegt aber nicht vor. Man sieht sich im Gegenteil heute genötigt, auch die entgegengesetzte Hypothese zu diskutieren, wie z. B. bei den Versuchen einer feldtheoretischen Erklärung der Struktur der Elementarteilchen, in der der Kontinuumsbegriff die primäre Rolle spielt. Die folgenden Ausführungen entsprechen, streng genommen, dieser zweiten Hypothese. Sie werden aber auch im Falle einer Entscheidung zugunsten der ersten Hypothese keineswegs völlig wertlos, da sie in der makroskopischen Physik auf alle Fälle gültig sind.

Wir betrachten zunächst ein einziges, kräftefrei bewegtes Teilchen. In der durch die Fig. 13 angedeuteten 4-dimensionalen Beschreibung wird dieses

Teilchen durch ein schraffiertes Gebiet dargestellt, das auf allen Hyperebenen $t = \text{const}$ kleine Querschnitte liefert. Wir dürfen also in diesem Fall von einer engen Röhre des 4-dimensionalen Raumes sprechen. Nur innerhalb dieser Röhre wird der Tensor $T_{\lambda\mu}$, der die innere Beschaffenheit des Teilchens bestimmt, von Null verschieden sein. Nach den Ergebnissen des § 37 besitzt dieses Teilchen zunächst einen konstanten 4-dimensionalen Impulsvektor p_λ . Es folgt aber daraus nicht, daß auch die Geschwindigkeit des Teilchens konstant sein wird. Um zu diesem Ergebnis zu gelangen, muß man eine besondere Annahme einführen. Da sich nämlich nach § 35 der Schwerpunkt des Teilchens mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, genügt es anzunehmen, daß sich der Schwerpunkt im Innern des Teilchens befindet. Wie man aus (35, 2) unmittelbar ersieht, wird diese Annahme dann erfüllt, wenn die Energiedichte W positiv-definit ist. Den allgemeinen Fall eines nicht überall positiven W , wobei also der Schwerpunkt auch außerhalb des Teilchens liegen kann, werden wir in § 41 behandeln. Hier wollen wir den für die makroskopische Physik allein interessierenden Fall eines positiven W betrachten. In diesem Fall wird also das Teilchen im 4-dimensionalen Raum durch eine Röhre mit geradliniger Achse dargestellt. Und zwar wird diese Röhre zylindrisch, wenn es keine inneren Bewegungen im Teilchen gibt. Die Geschwindigkeit aller Punkte des Teilchens wird dann der Geschwindigkeit seines Schwerpunktes gleich, so daß die Beziehung (35, 4) mit den ersten drei Gleichungen (14, 12) identisch wird. Die Gesamtenergie des Kontinuums haben wir in § 37 durch $E = c p_4$ dargestellt, was mit der vierten Gleichung (14, 12) übereinstimmt. Wir haben also den gesamten 4-dimensionalen Impulsvektor p_λ des kräftefreien Massenpunktes aus den Erhaltungssätzen des Kontinuums abgeleitet.

Im Falle mehrerer Teilchen, die miteinander nur durch Stöße wechselwirken, werden für jedes Teilchen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen die vorigen Ergebnisse unverändert gelten. Bei einem Stoß werden sich die den zwei Teilchen entsprechenden 4-dimensionalen Röhren treffen (Fig. 14). Nach dem Stoß setzen sich die Röhren mit veränderten Achsenrichtungen, entsprechend der durch den Stoß veränderten Geschwindigkeiten der Teilchen weiter fort. Betrachtet man ein Zeitintervall, in dem kein Zusammenstoß stattfindet, so kann man die zu dem Energie-Impulssatz führenden Integrationen des § 33 verschieden gestalten. Man kann nämlich die Integration entweder im Innern der je ein Teilchen umschließenden Flächen S_1 und S_2 (Schnitt $t = t_1$ in Fig. 14) oder im Innern der beiden Teil-

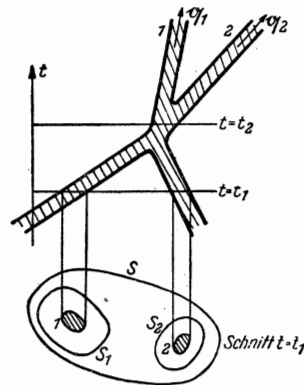


Fig. 14

chen umschließenden Fläche S ausführen. Im ersten Fall gewinnt man den Erhaltungssatz für jedes einzelne Teilchen:

$$\left. \begin{aligned} p_\lambda^{(1)} &= \text{const} \\ p_\lambda^{(2)} &= \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3), \quad (38, 1)$$

im zweiten Fall dagegen den Erhaltungssatz für beide Teilchen zusammengekommen:

$$p_\lambda^{(1)} + p_\lambda^{(2)} = \text{const}. \quad (38, 2)$$

Die Beziehungen (38, 1) gelten aber nur bis zu dem Augenblick, in dem der Stoß beginnt. Während des Stoßes, wie z. B. für $t = t_2$ (Fig. 14), gibt es keine Flächen S_1 und S_2 , und man kann daher die Beziehungen (38, 1) nicht mehr beweisen. Dagegen gilt die Beziehung (38, 2) auch während des Stoßes, da man Flächen der Art S auch für $t = t_2$ konstruieren kann.

Wirken die Teilchen aus endlichen Entfernungen aufeinander, so wird dann im ganzen umgebenden Raum das entsprechende Kraftfeld existieren und darin einen von Null verschiedenen 4-dimensionalen Spannungstensor haben. Wir können also in diesem Fall nur im makroskopischen Sinne von den die Teilchen darstellenden 4-dimensionalen Röhren sprechen, d. h., wenn wir den materiellen Teil von $T_{\lambda\mu}$ vom Feldanteil getrennt betrachten. Die Röhren werden jetzt nicht mehr geradlinig verlaufen, da die Kraftwirkungen dauernd von Null verschieden sind. Die Erhaltungssätze von Impuls und Energie wird man jetzt nur für die Gesamtheit der vorhandenen Teilchen anwenden können, unter Berücksichtigung des ganzen Raumbereiches, in welchem die entsprechenden Kraftwirkungen von Null verschieden sind.

§ 39. Der 4-dimensionale Momententensor

Um zu den Transformationseigenschaften des Drehimpulses zu gelangen, müssen wir die Formulierung des § 34 vierdimensional erweitern. Statt des Punktes ξ_i des 3-dimensionalen Raumes werden wir also einen Punkt ξ_λ des MINKOWSKISCHEN Raumes ($\lambda = 0, 1, 2, 3$) zugrunde legen. Den Punkt ξ_λ darf man wieder beliebig wählen, dann aber wird man ihn festhalten müssen, so daß sich die Werte ξ_λ mit der Zeit nicht ändern. Die Verschiebung, die vom Momentenzentrum ξ_λ zu dem Aufpunkt x_λ des MINKOWSKISCHEN Raumes führt, ist der Vierervektor mit den Komponenten

$$l_\lambda = x_\lambda - \xi_\lambda. \quad (39, 1)$$

Wir bilden nun den Tensor dritter Stufe

$$F_{\lambda\mu\nu} = l_\lambda T_{\mu\nu} - l_\mu T_{\lambda\nu}, \quad (39, 2)$$

welcher in den zwei ersten Indizes antisymmetrisch ist:

$$F_{\lambda\mu\nu} = -F_{\mu\lambda\nu}. \quad (39, 3)$$

Die Komponenten von $F_{\lambda\mu\nu}$ sind Funktionen von x_ϱ , d. h. $F_{\lambda\mu\nu}$ ist ein Tensorfeld der Stufe 3. Nach den Ausführungen von § 19 wird also durch die Ausdrücke $\sum_\nu \frac{\partial F_{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\nu}$ ein Tensor der Stufe 2 definiert. Beachten wir die

Grundgleichung (31, 1) des Kontinuums, so folgt aus (39, 2)

$$\sum_\nu \frac{\partial F_{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \sum_\nu \frac{\partial l_\lambda}{\partial x_\nu} T_{\mu\nu} - \sum_\nu \frac{\partial l_\mu}{\partial x_\nu} T_{\lambda\nu}. \quad (39, 4)$$

Andererseits findet man aus (39, 1), da ξ_λ konstante Zahlen sind:

$$\frac{\partial l_\lambda}{\partial x_\nu} = \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\nu} = \delta_{\lambda\nu}, \quad \frac{\partial l_\mu}{\partial x_\nu} = \delta_{\mu\nu}.$$

Führt man diese Werte in (39, 4) ein, so wird

$$\sum_\nu \frac{\partial F_{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\nu} = T_{\mu\lambda} - T_{\lambda\mu}.$$

Also wegen (29, 6)

$$\sum_\nu \frac{\partial F_{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (39, 5)$$

Diese der Beziehung (31, 1) analoge Gleichung stellt die 4-dimensionale Verallgemeinerung des Drehimpulssatzes in differentieller Form dar.

Um zu der Integralforn dieses Satzes zu gelangen, müssen wir zunächst die Beziehung (39, 5) auf die Form (21, 11) zurückführen. Es genügt, dafür ein beliebiges homogenes Feld zweiter Stufe $A_{\lambda\mu}$ hinzuzunehmen, dessen Komponenten also beliebige konstante Zahlen sind:

$$\frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial x_\varrho} = 0. \quad (39, 6)$$

Multiplikation von (39, 5) mit $A_{\lambda\mu}$ und Summation über λ, μ ergibt

$$\sum_{\lambda\mu\nu} A_{\lambda\mu} \frac{\partial F_{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Oder wegen (39, 6)

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} F_{\lambda\mu\nu} \right) = 0. \quad (39, 7)$$

Diese Beziehung ist von der Form (21, 11) mit

$$s_\nu = \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} F_{\lambda\mu\nu}.$$

Es folgt daher aus (36, 4)

$$\frac{d}{dt} \int \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} dV = 0.$$

Oder, wenn man die Konstanz von $A_{\lambda\mu}$ berücksichtigt,

$$\sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \frac{d}{dt} \int F_{\lambda\mu} dV = 0. \quad (39, 8)$$

Ähnlich gilt nach (36, 6) im Koordinatensystem x'_μ die Beziehung

$$\sum_{\lambda\mu} A'_{\lambda\mu} \frac{d}{dt'} \int F'_{\lambda\mu} dV' = 0.$$

Ferner folgt aus (36, 12)

$$\sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \int F_{\lambda\mu} dV = \sum_{\lambda\mu} A'_{\lambda\mu} \int F'_{\lambda\mu} dV'. \quad (39, 9)$$

Wir setzen

$$\frac{1}{c} \int F_{\lambda\mu} dV = I_{\lambda\mu}, \quad (39, 10)$$

und ähnlich im Koordinatensystem x'_μ :

$$\frac{1}{c} \int F'_{\lambda\mu} dV' = I'_{\lambda\mu}.$$

Die Beziehung (39, 8) nimmt dann die Form an:

$$\sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \frac{dI_{\lambda\mu}}{dt} = 0.$$

Bedenkt man nun, daß diese Beziehung für beliebige Werte von $A_{\lambda\mu}$ gelten muß, so folgt

$$\frac{dI_{\lambda\mu}}{dt} = 0,$$

oder

$$I_{\lambda\mu} = \text{const.} \quad (39, 11)$$

Ähnlich wird im Koordinatensystem x'_μ

$$I'_{\lambda\mu} = \text{const.}$$

Die Beziehung (39, 9) wird zu

$$\sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} I_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda\mu} A'_{\lambda\mu} I'_{\lambda\mu}. \quad (39, 12)$$

Berücksichtigt man, daß $A_{\lambda\mu}$ ein Tensor ist und daher der Transformationsformel (18, 6) genügt,

$$A'_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho\sigma} \alpha_{\lambda\varrho} \alpha_{\mu\sigma} A_{\varrho\sigma},$$

so folgt aus (39, 12) mit Hilfe einer Rechnung, welche der zu (37, 9) führenden völlig analog ist, die Beziehung

$$I_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho\sigma} \alpha_{\varrho\lambda} \alpha_{\sigma\mu} I'_{\varrho\sigma} \quad (39, 13)$$

bzw. die reziproke Formel

$$I'_{\lambda\mu} = \sum_{\varrho\sigma} \alpha_{\lambda\varrho} \alpha_{\mu\sigma} I_{\varrho\sigma}. \quad (39, 14)$$

Die durch (39, 10) definierten Größen $I_{\lambda\mu}$ sind also die Komponenten eines Tensors der Stufe 2.

Aus (39, 3) und (39, 10) folgt

$$I_{\lambda\mu} = -I_{\mu\lambda}. \quad (39, 15)$$

Der Tensor $I_{\lambda\mu}$ ist also antisymmetrisch und hat daher sechs unabhängige Komponenten:

$$I_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 0 & I_{12} & I_{13} & I_{14} \\ -I_{12} & 0 & I_{23} & I_{24} \\ -I_{13} & -I_{23} & 0 & I_{34} \\ -I_{14} & -I_{24} & -I_{34} & 0 \end{pmatrix}. \quad (39, 16)$$

Um die physikalische Bedeutung der Komponenten $I_{\lambda\mu}$ zu erkennen, schreiben wir zunächst den aus (39, 10) und (39, 2) folgenden Ausdruck für I_{12} hin:

$$I_{12} = \frac{1}{c} \int F_{124} dV = \frac{1}{c} \int (l_1 T_{24} - l_2 T_{14}) dV = \int (l_1 g_2 - l_2 g_1) dV. \quad (39, 17a)$$

Nach (34, 3) ist also I_{12} mit der z -Komponente des Gesamtdrehimpulses $\mathfrak{J}$ identisch:

$$I_{12} = I_z. \quad (39, 17)$$

Ähnlich findet man

$$I_{23} = I_x, \quad I_{31} = I_y. \quad (39, 18)$$

Die Komponenten $I_{\lambda\mu}$, bei denen beide Indizes $\lambda, \mu \neq 4$ sind, stimmen also mit den Komponenten des gewöhnlichen (3-dimensionalen) Drehimpulses überein, so daß der entsprechende Teil der Tensorgleichung (39, 11) dem Drehimpulssatz äquivalent ist.

Es bleibt noch die Deutung der Komponenten I_{i4} ($i = 1, 2, 3$). Nach (39, 10) und (39, 2) ist

$$I_{i4} = \frac{1}{c} \int F_{i44} dV = \frac{1}{c} \int (l_i T_{44} - l_4 T_{i4}) dV. \quad (39, 19)$$

Beachtet man (39, 1) und (30, 5a), so ergibt sich für den ersten Term der rechten Seite

$$-\frac{1}{c} \int l_i T_{44} dV = \frac{1}{c} \int (x_i - \xi_i) W dV.$$

Dieser Term ist also bis auf den Faktor $\frac{1}{c}$ mit dem linearen Moment der Energieverteilung identisch. Der letzte Ausdruck läßt sich mit Hilfe der Definitionsgleichung (35, 2) des Schwerpunktes weiter vereinfachen. Beachtet man noch, daß ξ_i konstant ist, so wird

$$\int \xi_i W dV = \xi_i \int W dV = \xi_i E$$

und

$$\frac{1}{c} \int l_i T_{44} dV = \frac{E}{c} (X_i - \xi_i). \quad (39, 20)$$

Beim zweiten Term der rechten Seite von (39, 19), der sich aus der 4-dimensionalen Formulierung zwangsläufig ergibt, ist der Faktor

$$l_4 = x_4 - \xi_4 = ct - \xi_4$$

eine Konstante und kann aus dem Integral herausgenommen werden. Es wird also nach (33, 11)

$$-\frac{1}{c} \int l_4 T_{i4} dV = (ct - \xi_4) \int g_i dV = (ct - \xi_4) p_i. \quad (39, 21)$$

Führt man (39, 20) und (39, 21) in (39, 19) ein, so folgt

$$I_{i4} = \frac{E}{c} (X_i - \xi_i) - (ct - \xi_4) p_i. \quad (39, 22)$$

Bedenkt man noch, daß nach (33, 13), (33, 14) und (39, 11) die Größen p_i , E und I_{i4} konstant sind, so folgt aus (39, 22), daß X_i eine lineare Funktion von t ist. Die Gleichungen (39, 22) drücken also den Schwerpunktssatz aus. Danach ist in der Tensorgleichung (39, 11) sowohl der Drehimpuls- wie auch der Schwerpunktssatz enthalten. Den Beziehungen (39, 17a) und (39, 19) entsprechend werden wir den Tensor $I_{\lambda\mu}$ als den 4-dimensionalen Momententensor bezeichnen.

Die Gleichung (39, 22) stellt das Integral von (35, 4) dar. Differenziert man nämlich (39, 22) nach t , so folgt

$$0 = \frac{E}{c} \frac{dX_i}{dt} - c p_i,$$

d. h. Gleichung (35, 4). Nach (35, 4) bzw. (39, 22) ist die Bahn des Schwerpunktes eine Gerade des 3-dimensionalen Raumes, die dem 3-dimensionalen Impuls p_i ($i = 1, 2, 3$) parallel ist. Gleichung (39, 22) kann man in eine mehr symmetrische Form bringen, wenn man an diejenige Weltlinie denkt, welche die Bewegung des Schwerpunktes im MINKOWSKISCHEN Raum darstellt. Beachtet man nämlich, daß die durch (35, 2) definierten Werte X_i ($i = 1, 2, 3$) die Koordinaten des Schwerpunktes zum Zeitpunkt t sind,

$$X_i = X_i(t),$$

so folgt unmittelbar, daß man als entsprechende vierte Koordinate des Schwerpunktes

$$X_4 = ct \quad (39, 23a)$$

setzen muß. Berücksichtigt man noch, daß $E = c p_4$ ist, so wird (39, 22) zu

$$I_{i4} = (X_i - \xi_i) p_4 - (X_4 - \xi_4) p_i. \quad (39, 23)$$

Diese Gleichungen bestimmen die Weltlinie, welche die Bewegung des Schwerpunktes im 4-dimensionalen Raum beschreibt. Wir werden diese Weltlinie der Kürze halber als die Schwerpunktslinie bezeichnen. Differenzieren wir Gleichung (39, 23) nach der Eigenzeit der Schwerpunktslinie, so folgt wegen der Konstanz von I_{i4} , p_4 und ξ_4

$$p_4 \frac{dX_i}{d\tau} = p_i \frac{dX_4}{d\tau}. \quad (39, 24)$$

Diese Beziehung zeigt, daß die Schwerpunktslinie dem 4-dimensionalen Impulsvektor p_λ parallel ist.

Hätten wir als Momentenzentrum statt des Punktes ξ_λ einen anderen Punkt η_λ gewählt, so würden sich in diesem Fall andere Werte von $I_{\lambda\mu}$ ergeben. In Wirklichkeit sind also die Komponenten $I_{\lambda\mu}$ des Momententensors Funktionen der Koordinaten des zugrunde gelegten Momentenzentrums. Und zwar sind die $I_{\lambda\mu}$ nach (39, 10) und (39, 2) lineare Funktionen dieser Koordinaten. Wir wollen noch eine Beziehung zwischen $I_{\lambda\mu}(\xi_\lambda)$ und $I_{\lambda\mu}(\eta_\lambda)$ ableiten. Diese folgt unmittelbar aus (39, 10) und (39, 2), wenn man $x_\lambda - \xi_\lambda$ so schreibt:

$$x_\lambda - \xi_\lambda = (x_\lambda - \eta_\lambda) + (\eta_\lambda - \xi_\lambda).$$

Dann ergibt (39, 10):

$$I_{\lambda\mu}(\xi_\lambda) = I_{\lambda\mu}(\eta_\lambda) + \frac{1}{c} \int [(\eta_\lambda - \xi_\lambda) T_{\mu 4} - (\eta_\mu - \xi_\mu) T_{\lambda 4}] dV.$$

Und weil $\eta_\lambda - \xi_\lambda$ bei der Integration konstant bleibt, gilt:

$$I_{\lambda\mu}(\xi_e) = I_{\lambda\mu}(\eta_e) + (\eta_\lambda - \xi_\lambda) p_\mu - (\eta_\mu - \xi_\mu) p_\lambda. \quad (39, 25)$$

Aus dieser allgemeinen Formel folgt ein interessantes Ergebnis. Ist nämlich der Vektor $\eta_\lambda - \xi_\lambda$ dem 4-dimensionalen Impulsvektor p_λ parallel, so heben sich die zwei letzten Terme in (39, 25) auf und es bleibt

$$I_{\lambda\mu}(\xi_e) = I_{\lambda\mu}(\eta_e).$$

Der Momententensor hat also denselben Wert, wenn man als Momentenzentrum irgendeinen Punkt einer zu p_λ parallelen Weltlinie nimmt.

Wählen wir als Momentenzentrum ξ_λ einen Punkt der Schwerpunktslinie, z. B. denjenigen, der dem Zeitpunkt t_1 entspricht,

$$\xi_\lambda = X_\lambda(t_1) \quad (\lambda = 1, 2, 3, 4),$$

so sieht man sofort aus (39, 23), daß alle drei Komponenten I_{i4} zum Zeitpunkt $t = t_1$ verschwinden. Da sie unabhängig von der Zeit sind, müssen sie ständig verschwinden:

$$I_{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (39, 26)$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß auch das Umgekehrte gilt, d. h. daß die Beziehung (39, 26) nur dann erfüllt wird, wenn das Momentenzentrum auf der Schwerpunktslinie liegt. Setzen wir nämlich

$$\xi_4 = c t_1 \quad (39, 27)$$

und betrachten wir Gleichung (39, 23) für den Zeitpunkt $t = t_1$, so wird wegen (39, 23 a) der letzte Term verschwinden, und es bleibt

$$I_{i4} = [X_i(t_1) - \xi_i] p_4.$$

Daraus folgt — da $c p_4 = E > 0$ sein muß —, daß die Beziehungen (39, 26) nur dann gelten werden, wenn

$$\xi_i = X_i(t_1). \quad (39, 28)$$

Die Beziehungen (39, 27) und (39, 28) bedeuten aber, daß das Momentenzentrum ξ_λ mit dem zu $t = t_1$ entsprechenden Punkt der Schwerpunktslinie übereinstimmt. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich eine neue, besonders nützliche Definition der Schwerpunktslinie: Diese ist der Ort der Punkte ξ_λ , die, als Momentenzentra genommen, zu verschwindenden Werten von I_{i4} führen.

§ 40. Transformationsformeln für $I_{\lambda\mu}$. Eigenschaften der Schwerpunktslinie

Wir betrachten ein allgemeines mechanisches Kontinuum in demjenigen Koordinatensystem, in welchem sein Gesamtimpuls verschwindet:

$$p_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Nach (35, 4) hat dann der Schwerpunkt die Geschwindigkeit Null,

$$\frac{dX_i}{dt} = 0.$$

Der Schwerpunkt wird also ein fester Punkt des 3-dimensionalen Raumes, d. h. in der 4-dimensionalen Beschreibung wird die Schwerpunktslinie eine zur Zeitachse parallele Gerade sein. Wir werden dieses Koordinatensystem das Ruhssystem des Kontinuums als Ganzes nennen und es mit x_μ^* bezeichnen. In x_μ^* hat also der 4-dimensionale Impulsvektor p_i^* des Kontinuums die Form

$$p_i^* = \left(0, 0, 0, \frac{E_0}{c}\right). \quad (40, 1)$$

Wir wollen aber nicht annehmen, daß auch die einzelnen Teile des Kontinuums in x_μ^* ruhen, sondern werden einen beliebigen inneren Bewegungszustand zulassen. Dieser inneren Bewegung zufolge wird der Gesamtdrehimpuls des Kontinuums im allgemeinen von Null verschieden sein. Die Werte der Drehimpulskomponenten sind in diesem Fall von der Wahl des Momentenzentrums unabhängig. Dies folgt unmittelbar aus der Beziehung (39, 25). Nach (39, 17) und (39, 18) sind nämlich die Komponenten des Gesamtdrehimpulses $\mathfrak{J}^*$ gleich den Komponenten $I_{23}^*, I_{31}^*, I_{12}^*$ des Momententensors $I_{\lambda\mu}^*$. Beachtet man aber, daß nach (40, 1) $p_i^* = 0$ für $i = 1, 2, 3$ ist, so ergibt sich aus (39, 25):

$$I_{ik}^*(\xi_k) = I_{ik}^*(\eta_k) \quad \text{für } i, k = 1, 2, 3.$$

Wir dürfen also das Momentenzentrum so wählen, daß wir dadurch den Momententensor $I_{\lambda\mu}^*$ nach Möglichkeit vereinfachen, ohne daß sich dabei $\mathfrak{J}^*$ irgendwie ändert. Nach den Ausführungen am Ende des § 39 wird man am zweckmäßigsten als Momentenzentrum einen Punkt der Schwerpunktslinie wählen:

$$\xi_i^* = X_i^*. \quad (40, 2)$$

Dann vereinfacht sich der Momententensor zu

$$I_{\lambda\mu}^* = \begin{pmatrix} 0 & I_x^* & -I_y^* & 0 \\ -I_x^* & 0 & I_z^* & 0 \\ I_y^* & -I_z^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (40, 3)$$

Wir gehen nun zu einem neuen Koordinatensystem x_μ durch die LORENTZ-Transformation

$$x_1 = \frac{x_1^* + \beta x_4^*}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x_2 = x_2^*, \quad x_3 = x_3^*, \quad x_4 = \frac{x_4^* + \beta x_1^*}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (40, 4)$$

über. Im Koordinatensystem x_μ wird das betrachtete Kontinuum neue Komponenten p_λ des Impulsvektors haben, die sich aus (40, 1) mit Hilfe der Transformationsformel (18, 5) berechnen lassen. Man findet

$$p_\lambda = \left(\frac{E_0}{c} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, 0, 0, \frac{E_0}{c\sqrt{1-\beta^2}} \right). \quad (40, 5)$$

Der Vergleich der drei ersten Gleichungen (40, 5) mit (35, 4) zeigt, daß der Schwerpunkt des Kontinuums sich in x_μ mit der Geschwindigkeit v parallel zur x_1 -Achse bewegt, wie es auch zu erwarten war¹⁾. Die neuen Komponenten des Momententensors lassen sich mit Hilfe der Transformationsformel (39, 14) berechnen. Die Rechnung verläuft wie in § 32 für den elektromagnetischen Tensor $F_{\lambda\mu}$ und ergibt die zu (22, 5) analogen Ergebnisse

$$\begin{aligned} I_{23} &= I_{23}^*, & I_{31} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (I_{31}^* - i\beta I_{30}^*), & I_{12} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (I_{12}^* + i\beta I_{20}^*); \\ I_{10} &= I_{10}^*, & I_{20} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (I_{20}^* - i\beta I_{12}^*), & I_{30} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (I_{30}^* + i\beta I_{31}^*). \end{aligned}$$

Beachtet man noch, daß nach (40, 3) $I_{k0}^* = 0$ ist und geht dann zu den reellen Komponenten $I_{k4} = \frac{1}{i} I_{k0}$ zurück, so folgt

$$\left. \begin{aligned} I_{23} &= I_{23}^*, & I_{31} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} I_{31}^*, & I_{12} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} I_{12}^*; \\ I_{11} &= 0, & I_{24} &= \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} I_{12}^*, & I_{34} &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} I_{31}^*. \end{aligned} \right\} \quad (40, 6)$$

Das Bemerkenswerte an dem Ergebnis (40, 6) ist, daß die neuen Komponenten I_{i4} nicht mehr alle verschwinden, wenn der Drehimpuls $\mathfrak{J}^*$ des Kontinuums von Null verschieden ist. Nach der am Ende des § 39 gegebenen Definition der Schwerpunktslinie bedeutet dieses Ergebnis, daß das Momentenzentrum, welches wir in x_μ^* auf der Schwerpunktslinie des Kontinuums genommen hatten, in x_μ nicht auf der Schwerpunktslinie liegt. Im Gegensatz zu dem Verhalten in der NEWTONschen Mechanik wird also hier die Schwerpunktslinie im allgemeinen vom Koordinatensystem abhängen. Nur im Falle $\mathfrak{J}^* = 0$ wird nach (40, 6) auch $I_{i4} = 0$ und daher ein und dieselbe Weltlinie die Schwerpunktslinie des Kontinuums in allen Koordinatensystemen sein. Im Falle $\mathfrak{J}^* \neq 0$ dagegen wird das Kontinuum in verschiedenen Koordinatensystemen verschiedene Schwerpunktslinien haben. Alle diese Schwerpunktslinien sind zueinander parallel — da sie alle dem Impulsvektor p_λ parallel sind — aber gegeneinander verschoben.

¹⁾ In (40, 4) haben die zu β proportionalen Terme umgekehrtes Vorzeichen als in (4, 12). Das Koordinatensystem x_μ^* bewegt sich also in bezug auf x_μ mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$.

Wir wollen diese Verschiebung für den Übergang vom Koordinatensystem x_μ^* zu x_μ ausrechnen. Wir gehen also von dem schon verwendeten Momentenzentrum ξ_e — welches so gewählt wurde, daß in x_μ^* $\xi_i^* = X_i^*$ ($i = 1, 2, 3$) war — zu einem neuen η_e über und verlangen, daß η_e auf der neuen Schwerpunktslinie liegt. Die Bedingung dafür ist nach (39, 26)

$$I_{i4}(\eta_e) = 0. \quad (40, 7)$$

Setzen wir

$$\eta_e - \xi_e = \delta \xi_e,$$

so folgt aus der allgemeinen Formel (39, 25):

$$I_{i4}(\eta_e) = I_{i4}(\xi_e) - p_4 \delta \xi_i + p_i \delta \xi_4. \quad (40, 8)$$

Da wir nur diese drei Gleichungen für die Bestimmung der vier $\delta \xi_e$ haben, dürfen wir eine der Komponenten $\delta \xi_e$ frei wählen. Setzen wir

$$\delta \xi_4 = 0,$$

so folgt aus (40, 8) und (40, 7), unter Beachtung der durch (40, 6) gegebenen Werte von $I_{i4}(\xi_e)$,

$$0 = -p_4 \delta \xi_1,$$

$$0 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} I_z^* - p_4 \delta \xi_2,$$

$$0 = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} I_y^* - p_4 \delta \xi_3.$$

Daher ist

$$\delta \xi_1 = 0, \quad \delta \xi_2 = \frac{1}{p_4} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} I_z^*, \quad \delta \xi_3 = -\frac{1}{p_4} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} I_y^*.$$

Beachtet man, daß nach (40, 5)

$$p_4 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{E_0}{c}$$

ist, so wird

$$\delta \xi_1 = 0, \quad \delta \xi_2 = \frac{v}{E_0} I_z^*, \quad \delta \xi_3 = -\frac{v}{E_0} I_y^*. \quad (40, 9)$$

Oder in 3-dimensionaler Vektorform,

$$\delta \mathbf{r} = \frac{1}{E_0} [\mathbf{v} \mathfrak{J}'], \quad (40, 10)$$

wobei $\delta \mathbf{r}$ den Vektor mit den Komponenten $\delta \xi_i$ und $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes im neuen Koordinatensystem bedeutet. Aus der Be-

ziehung (40, 10) geht wieder hervor, daß mit $\mathfrak{J}^* = 0$ auch $\delta r = 0$ ist, d. h., daß in diesem Fall das Kontinuum eine eindeutig bestimmte Schwerpunktslinie hat.

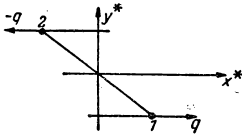


Fig. 15

Wir werden die Formel (40, 10) an einem besonders einfachen Beispiel durch unmittelbare Rechnung verifizieren. Wir betrachten ein mechanisches System, das aus zwei gleich kräftefrei bewegten Teilchen besteht. Im Koordinatensystem x_μ^* sei die Bewegung der beiden Teilchen durch folgende Gleichungen bestimmt (Fig. 15),

$$\left. \begin{aligned} \text{Teilchen 1: } x^* &= q t^*, & y^* &= -a, & z^* &= 0; \\ \text{„ 2: } x^* &= -q t, & y^* &= a, & z^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (40, 11)$$

Der 4-dimensionale Impulsvektor des Systems wird der Summe der Impulsvektoren der zwei Teilchen gleich,

$$p_\lambda^* = p_\lambda^{*(1)} + p_\lambda^{*(2)}, \quad (40, 12)$$

wobei

$$p_\lambda^{*(1)} = (mq, 0, 0, mc), \quad p_\lambda^{*(2)} = (-mq, 0, 0, mc). \quad (40, 13)$$

Die Gesamtenergie E_0 in x_μ^* wird also

$$E_0 = 2 mc^2. \quad (40, 14)$$

Der Gesamtdrehimpuls hat die Komponenten

$$I_x^* = I_y^* = 0, \quad I_z^* = 2 a m q. \quad (40, 15)$$

Da die Energien der zwei Teilchen einander gleich sind, wird der Schwerpunkt in der Mitte der jeweiligen Verbindungslinie der zwei Teilchen liegen und stimmt daher mit dem Punkt $x^* = y^* = z^* = 0$ überein.

Wir gehen nun zu dem neuen durch (40, 4) bestimmten Koordinatensystem x_μ über. Aus (40, 13) und der Transformationsformel (18, 5) des Vektors ergeben sich für die neuen Impulskomponenten der zwei Teilchen die Werte

$$\left. \begin{aligned} p_\lambda^{(1)} &= \left(\frac{mq + mv}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{mc + \beta mq}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right), \\ p_\lambda^{(2)} &= \left(\frac{-mq + mv}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{mc - \beta mq}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (40, 16)$$

Die Energien der zwei Teilchen werden also im Koordinatensystem x_μ voneinander verschieden sein. Da die Entfernungen der Teilchen von der x -Achse wegen $y^* = y$ unverändert bleiben, wird der Schwerpunkt nicht mehr auf der

x -Achse liegen, d. h., es wird eine von Null verschiedene Verschiebung $\delta\xi_2$ geben. Für $\delta\xi_2$ findet man aus den durch (40, 16) gegebenen Energiewerten die Beziehung

$$(c + \beta q)(a + \delta\xi_2) = (c - \beta q)(a - \delta\xi_2).$$

Daraus folgt

$$\delta\xi_2 = -\frac{a v q}{c^2}. \quad (40, 17)$$

Die Verschiebung $\delta\xi_3$ wird offenbar gleich Null. Von einer Verschiebung $\delta\xi_1$ darf man ohne weiteres absehen, da sich der Schwerpunkt in x_μ parallel der x_1 -Achse bewegt. Es wird also insgesamt

$$\delta\mathbf{r} = \left(0, -\frac{a v q}{c^2}, 0\right).$$

Dasselbe Ergebnis folgt aber auch aus (40, 10), wenn man nur beachtet, daß der Schwerpunkt sich in x_μ mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ bewegt.

Wir werden noch ein drittes Koordinatensystem x'_μ betrachten, welches aus x_μ^* durch eine zur x_2^* -Achse parallele Translation hervorgeht. Die Formeln dieser LORENTZ-Transformation werden also aus (40, 4) durch Vertauschung der Rollen der x_1 - und x_2 -Achsen gewonnen:

$$x'_1 = x_1^*, \quad x'_2 = \frac{x_2^* + \beta x_4^*}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_3 = x_3^*, \quad x'_4 = \frac{x_4^* + \beta x_2^*}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (40, 18)$$

Für die Impulsvektoren der zwei Teilchen ergeben sich jetzt die Komponenten

$$\left. \begin{aligned} p'^{(1)}_1 &= \left(m q, \frac{m v}{\sqrt{1 - \beta^2}}, 0, \frac{m c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right), \\ p'^{(2)}_1 &= \left(-m q, \frac{m v}{\sqrt{1 - \beta^2}}, 0, \frac{m c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (40, 19)$$

Die Gleichungen, welche die Bewegung der Teilchen in x'_μ beschreiben, lassen sich aus (40, 11) mit Hilfe der zu (40, 18) reziproken Transformation,

$$x_1^* = x'_1, \quad x_2^* = \frac{x'_2 - \beta x'_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x_3^* = x'_3, \quad x_4^* = \frac{x'_4 - \beta x'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

ableiten. Das Ergebnis lautet:

$$\left. \begin{aligned} \text{Teilchen 1: } x' &= \frac{a v q}{c^2} + q \sqrt{1 - \beta^2} t', \quad y' = -a \sqrt{1 - \beta^2} + v t', \quad z' = 0; \\ \text{„ 2: } x' &= \frac{a v q}{c^2} - q \sqrt{1 - \beta^2} t', \quad y' = a \sqrt{1 - \beta^2} + v t', \quad z' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (40, 20)$$

Im Koordinatensystem x'_μ bewegt sich der Schwerpunkt parallel zur y' -Achse. Wir dürfen also von einer zu dieser Achse parallelen Verschiebung des Schwerpunktes absehen und $\delta\xi'_2 = 0$ setzen. Ferner sieht man aus (40, 20), daß sich beide Teilchen in der Ebene $z' = 0$ bewegen, so daß auch hier $\delta\xi'_3 = 0$ wird. Wir haben also im vorliegenden Fall nur die Komponente $\delta\xi'_1$ der Verschiebung zu berechnen.

Die Komponente $\delta\xi'_1$ wird jetzt, im Gegensatz zum vorigen Fall, nicht mehr aus einer Änderung des Verhältnisses der Energien der zwei Teilchen folgen, da diese Energien nach (40, 19) einander gleich bleiben. Sie ergibt sich aber aus der Tatsache, daß nach (40, 20) die einem gegebenen Zeitpunkt t' entsprechenden Werte der x' -Koordinate der zwei Teilchen nicht mehr entgegengesetzt gleich sind. Der Mittelpunkt dieser x' -Koordinaten wird offensichtlich gleich der Koordinate X'_1 des Schwerpunktes in x'_μ und daher gleich $\delta\xi'_1$ sein. Es gilt also

$$\delta\xi'_1 = \frac{aqv}{c^2}. \quad (40, 21)$$

Diese Betrachtungen zeigen, daß im vorliegenden Fall die Schwerpunktsverschiebung dadurch zustande kommt, daß die einem gegebenen Wert von t' entsprechenden, also im Koordinatensystem x'_μ gleichzeitigen Lagen der zwei Teilchen, verschiedenen Werten von t' entsprechen, d. h. in x'_μ nicht gleichzeitig sind. Für die Bestimmung der Lage des Schwerpunktes in x'_μ muß man aber die Integration in (35, 2) für $t' = \text{const}$ durchführen, also im vorliegenden Fall die Lage der Teilchen für einen und denselben Wert von t' nehmen. Die Gesamtverschiebung des Schwerpunktes hat danach den Wert

$$\delta\mathbf{r}' = \left(\frac{aqv}{c^2}, 0, 0 \right).$$

Man bestätigt sofort, daß derselbe Wert der Verschiebung auch aus der allgemeinen Formel (40, 10) folgt. Man muß nur beachten, daß in x'_μ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes den Wert $\mathbf{v} = (0, v, 0)$ hat.

§ 41. Das allgemeine Punktteilchen

In diesem letzten Abschnitt werden wir die Bewegungsgleichungen des allgemeinen, kräftefrei bewegten Teilchens ableiten. Der Tensor $T_{\lambda\mu}$, welcher die innere Beschaffenheit des Teilchens beschreibt, erfüllt die Grundgleichung (31, 1) des Kontinuums:

$$\sum_e \frac{\partial T_{\lambda e}}{\partial x_e} = 0. \quad (41, 1)$$

Nach den Ausführungen von § 38 wird $T_{\lambda\mu}$ nur innerhalb einer engen Röhre des MINKOWSKISCHEN Raumes von Null verschieden sein. Wir wollen noch annehmen, daß das Teilchen durch einen Grenzübergang zu einem Punkt-

teilchen wird, oder mit anderen Worten, daß die diesem Teilchen entsprechende 4-dimensionale Röhre unendlich eng ist. Von irgendwelchen speziellen Annahmen über die innere Beschaffenheit des Teilchens, wie z. B. der in § 38 eingeführten Annahme einer positiv-definiten Energiedichte W , wollen wir aber hier absehen, um bei der Diskussion des allgemeinsten Punktteilchens zu bleiben.

In § 37 und 39 haben wir aus der Gleichung (41, 1) die Erhaltungssätze (37, 7) und (39, 11) abgeleitet:

$$p_\lambda = \frac{1}{c} \int T_{\lambda 4} dV = \text{const}, \quad (41, 2)$$

$$I_{\lambda\mu} = \frac{1}{c} \int [(x_\lambda - \xi_\lambda) T_{\mu 4} - (x_\mu - \xi_\mu) T_{\lambda 4}] dV = \text{const}. \quad (41, 3)$$

Dabei ist p_λ ein 4-dimensionaler Vektor und $I_{\lambda\mu}$ ein antisymmetrischer Tensor. Die Bewegungsgleichungen des allgemeinen Punktteilchens sind schon in diesen Folgerungen der Grundgleichung (41, 1) des Kontinuums enthalten. Um sie aber in expliziter Form anzugeben, müssen wir zunächst die Beziehung (41, 3) in eine andere Form bringen.

Im Innern der 4-dimensionalen Röhre, welche die Bewegung des Teilchens darstellt, zeichnen wir eine zeitartige Weltlinie aus (Fig. 16). Die Willkür in der Wahl dieser Weltlinie ist unwesentlich, da wir in der Grenze zu einer unendlich engen Röhre übergehen. Wir wollen diese Weltlinie der Kürze halber die Achse der 4-dimensionalen Röhre nennen und die Koordinaten ihrer Punkte mit $\bar{x}_\lambda$ bezeichnen. Wir schreiben nun $x_\lambda - \xi_\lambda$ in der Form

$$x_\lambda - \xi_\lambda = (x_\lambda - \bar{x}_\lambda) + (\bar{x}_\lambda - \xi_\lambda). \quad (41, 4)$$

Dabei soll $\bar{x}_\lambda$ der Schnittpunkt der Röhrenachse mit derjenigen Hyperebene $t = \text{const}$ sein, auf welcher die Integration in (41, 3) durchzuführen ist. Führen wir (41, 4) in (41, 3) ein, so ergibt sich

$$I_{\lambda\mu} = \frac{1}{c} \int [(x_\lambda - \bar{x}_\lambda) T_{\mu 4} - (x_\mu - \bar{x}_\mu) T_{\lambda 4}] dV + \frac{1}{c} \int [(\bar{x}_\lambda - \xi_\lambda) T_{\mu 4} - (\bar{x}_\mu - \xi_\mu) T_{\lambda 4}] dV. \quad (41, 5)$$

Wir setzen

$$S_{\lambda\mu} = \frac{1}{c} \int [(x_\lambda - \bar{x}_\lambda) T_{\mu 4} - (x_\mu - \bar{x}_\mu) T_{\lambda 4}] dV. \quad (41, 6)$$

$S_{\lambda\mu}$ ist der Momententensor in bezug auf ein im Innern des Teilchens liegendes Momentenzentrum. Dementsprechend werden wir $S_{\lambda\mu}$ als den inneren Momententensor oder einfach als den Spintensor des Teilchens bezeichnen.

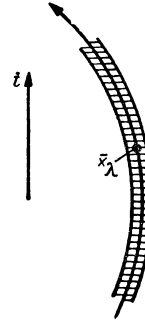


Fig. 16

Im zweiten Term von (41, 5) sind die Faktoren $\bar{x}_\lambda - \xi_\lambda$ und $\bar{x}_\mu - \xi_\mu$ konstant und dürfen daher aus dem Integral herausgenommen werden. Das Endergebnis lautet

$$I_{\lambda\mu} = S_{\lambda\mu} + (\bar{x}_\lambda - \xi_\lambda) \dot{p}_\mu - (\bar{x}_\mu - \xi_\mu) \dot{p}_\lambda. \quad (41, 7)$$

Die rechte Seite dieser Beziehung entspricht der in der NEWTONschen Mechanik üblichen Aufspaltung des Gesamtdrehimpulses eines rotierenden Körpers in den inneren und den Bahndrehimpuls. Nur die Summe dieser Terme ist nach (41, 3) konstant. Die Terme selbst werden sich im allgemeinen mit der Zeit ändern.

Im folgenden werden wir die in (41, 2) und (41, 6) auftretende Integration über das Innere des Teilchens nicht weiter berücksichtigen, sondern sowohl $S_{\lambda\mu}$ als auch $\dot{p}_\lambda$ als die lediglich von der Zeit abhängigen Bestimmungsgrößen des Teilchens betrachten. Ferner werden wir von der Ausdehnung des Teilchens absehen und uns seinen Ort zur Zeit t als durch die Angabe des Punktes $\bar{x}_\lambda$ bestimmt denken. Da wir das Symbol x_λ nicht mehr für andere Zwecke verwenden werden, wollen wir einfachheitshalber x_λ statt $\bar{x}_\lambda$ schreiben. Die Bewegung des Teilchens wird also durch Gleichungen der Form

$$x_\lambda = x_\lambda(t)$$

beschrieben. Statt t dürfen wir als Parameter die durch die Beziehung (3, 8),

$$d\tau = \frac{ds}{ic} = \frac{1}{ic} \sqrt{\sum_{\alpha} (dx_\alpha)^2},$$

definierte Eigenzeit τ des Teilchens verwenden. Differenzieren wir (41, 7) nach der Eigenzeit, so folgt wegen (41, 2), (41, 3) und der Zeitunabhängigkeit von ξ_λ :

$$\frac{dS_{\lambda\mu}}{d\tau} + u_\lambda \dot{p}_\mu - u_\mu \dot{p}_\lambda = 0. \quad (41, 8)$$

Dabei bedeutet u_λ die durch (10, 4) definierte 4-dimensionale Geschwindigkeit des Teilchens,

$$u_\lambda = \frac{dx_\lambda}{d\tau}.$$

Mit Hilfe der Beziehung (41, 8) können wir die allgemeine Form von $\dot{p}_\lambda$ bestimmen. Multiplizieren wir nämlich (41, 8) mit u_λ , so ergibt sich nach Summation über λ , wenn wir die Identität (10, 7) berücksichtigen,

$$\sum_{\lambda} u_\lambda \frac{dS_{\lambda\mu}}{d\tau} - c^2 \dot{p}_\mu - u_\mu \sum_{\lambda} u_\lambda \dot{p}_\lambda = 0.$$

Setzen wir also

$$\sum_{\lambda} u_\lambda \dot{p}_\lambda = -Mc^2, \quad (41, 9)$$

so folgt

$$p_\mu = M u_\mu + \frac{1}{c^2} \sum_\lambda u_\lambda \frac{dS_{\lambda\mu}}{d\tau}. \quad (41, 10)$$

Die skalare Größe M wird im allgemeinen weder mit der Masse m noch mit der Ruhmasse m_0 des Teilchens identisch. Die Masse m sollte man durch die allgemeinen Beziehungen (14, 9) und (14, 10) definieren,

$$mc = p_4.$$

Die Ruhmasse m_0 wird durch (14, 11) definiert. Setzt man also voraus, daß es ein Koordinatensystem x_μ^* gibt, in welchem der 3-dimensionale Impuls des Teilchens verschwindet, so wird in ihm

$$p_\lambda^* = \left(0, 0, 0, m_0 c = \frac{E_0}{c} \right).$$

Beachtet man die aus der Vektoreigenschaft von p_λ folgende Beziehung

$$\sum_\lambda (p_\lambda)^2 = \text{invariant} = \sum_\lambda (p_\lambda^*)^2,$$

so folgt

$$m_0^2 c^2 = (p_4)^2 - \sum_{i=1}^3 (p_i)^2.$$

Diese Beziehung stimmt mit (14, 15) genau überein. m und m_0 werden wegen (41, 2) von der Zeit unabhängig. Dagegen braucht M nicht konstant zu sein, da u_λ im allgemeinen von der Zeit abhängt.

Differenzieren wir die Beziehung (41, 10) nach der Eigenzeit, so folgt wegen (41, 2):

$$\frac{d p_\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(M u_\mu + \frac{1}{c^2} \sum_\lambda u_\lambda \frac{dS_{\lambda\mu}}{d\tau} \right) = 0. \quad (41, 11)$$

Gleichungen (41, 11) und (41, 8) stellen die Bewegungsgleichungen des allgemeinen Punktteilchens dar. Die Beziehung (41, 11) ist die Verallgemeinerung der Bewegungsgleichung, welche für das gewöhnliche in Kapitel II untersuchte Teilchen gilt. Dagegen stellt die Beziehung (41, 8) eine neuartige Gleichung dar, die man als die Bewegungsgleichung des Spins bezeichnen kann.

Man sieht nun sofort ein, daß der Fall des gewöhnlichen, im Kapitel II untersuchten Teilchens aus dem hier diskutierten allgemeinen, Fall mit Hilfe der Annahme

$$S_{\lambda\mu} = 0 \quad (41, 12)$$

hervorgeht. Dann wird nämlich die Spingleichung (41, 8) zu einer trivialen Identität, während (41, 11) sich auf

$$\frac{d}{d\tau}(Mu_\mu) = 0$$

reduziert. Dies ist aber von der Form der Bewegungsgleichung (12, 2) und wird mit ihr identisch, wenn man $M = m_0$ setzt. Um die physikalische Bedeutung der Bedingung (41, 12) zu erkennen, müssen wir auf die Definitionsgleichung (41, 6) von $S_{\lambda\mu}$ zurückgreifen. Danach ist cS_{i4} nichts anderes als das Dipolmoment der durch die Dichte W beschriebenen Energieverteilung. Die anderen drei Komponenten S_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) sind Kombinationen der Dipolmomente, welche den Impulsdichtekomponenten g_i entsprechen. Das Verschwinden von $S_{\lambda\mu}$ bedeutet also, daß im Innern des Teilchens die Größen W und g_i so verteilt sind, daß sie zu verschwindenden Dipolmomenten führen. Dementsprechend werden wir das durch (41, 12) charakterisierte Teilchen als einfaches *Polteilchen* bezeichnen.

Wir betrachten nun das allgemeine Teilchen mit $S_{\lambda\mu} \neq 0$. Es wäre zunächst naheliegend, auch dieses Teilchen im Sinne der makroskopischen Physik als ein Teilchen mit positiv-definiter Energieverteilung, jedoch mit nichtverschwindendem inneren Drehimpuls, zu deuten. Bei näherer Betrachtung erweist sich aber eine solche Deutung als unmöglich. Aus der positiv-definiten Energieverteilung folgt nämlich beim Übergang zum Punktteilchen die Beziehung

$$S_{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dagegen verlangt der nichtverschwindende innere Drehimpuls, daß die Komponenten S_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) von Null verschieden sind. Eine solche Form von $S_{\lambda\mu}$ ist aber nicht in allen Koordinatensystemen möglich. Nehmen wir nämlich an, daß der Tensor $S_{\lambda\mu}$ im Koordinatensystem x_μ diese Form hat, dann folgt unmittelbar aus der Transformationsformel von $S_{\lambda\mu}$ — welche der Transformationsformel von $I_{\lambda\mu}$ bzw. der elektromagnetischen Feldstärke $F_{\lambda\mu}$ ähnlich ist —, daß nach einer LORENTZ-Transformation im allgemeinen auch $S'_{i4} \neq 0$ wird. Man kann also das allgemeine Punktteilchen mit $S_{\lambda\mu} \neq 0$ nicht im Sinne der makroskopischen Physik deuten.

Dieses Teilchen besitzt aber eine Reihe von charakteristischen Eigenschaften, die es für die Mikrophysik besonders interessant machen. Zunächst wird nach (41, 10) der Impulsvektor nicht mehr zum Geschwindigkeitsvektor proportional. Demzufolge braucht die Geschwindigkeit des kräftefreien Teilchens nicht konstant zu sein. Nach dem Schwerpunktssatz ist aber die Geschwindigkeit des Schwerpunktes konstant. Daher wird der Schwerpunkt nicht notwendig innerhalb des Teilchens liegen, d. h. die Energieverteilung wird im allgemeinen nicht positiv-definit. Betrachten wir insbesondere das Ruhssystem x_μ^* , in welchem also $p_i^* = 0$ ($i = 1, 2, 3$) ist, so wird sich in x_μ das Teilchen um seinen ruhenden Schwerpunkt bewegen (im einfachsten Fall auf einer Kreisbahn, deren Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt des Teilchens

übereinstimmt). Diese Bewegung dürfen wir als eine nichtmakroskopische ansehen. In einem beliebigen Koordinatensystem x_μ müssen wir also zwischen der makroskopischen Bewegung mit der Geschwindigkeit des Schwerpunktes und der mikroskopischen oder inneren Bewegung des Teilchens mit der Geschwindigkeit u_i unterscheiden. Alle diese Eigenschaften, welche für das gewöhnliche Teilchen der makroskopischen Physik völlig unannehmbar sind, haben sich aber tatsächlich bei der Diskussion der DIRACschen Theorie des Elektrons ergeben. Man sieht daraus, daß das einfache Polteilchen als klassisches Modell des Elektrons — und zweifellos auch der anderen Elementarteilchen — ungeeignet ist. Für die richtige Beschreibung der Elementarteilchen wird man von dem in diesem Abschnitt diskutierten allgemeinen Punktteilchen mit $S_{\lambda\mu} \neq 0$ ausgehen müssen.

SACHVERZEICHNIS

Aberration des Lichtes 96
 Additionstheorem der Geschwindigkeiten 27
 antisymmetrischer Tensor 73
 Äther 13
 Ausbreitungsvektor 94

 Bahndrehimpuls 164
 Bewegungsgesetz, NEWTONSches 9
 Bewegungsgleichung eines Massenpunktes 128

 COMPTON-Streuung 64
 COMPTON-Wellenlänge 65

 D'ALEMBERT-Operator 78, 85
 Dipolmoment 166
 DOPPLER-Effekt 93
 Drehimpuls 136

 elastischer Stoß 60
 Energiedichte 100, 113, 139
 Energie-Impulssatz 131
 Energie-Impulsvektor 52, 145
 Energiemittelpunkt 140
 Energiestromdichte 100, 118
 Energie, Trägheit der 52
 Entropie 59
 Erhaltungssätze 44, 131, 136
 —, NEWTONSche 39

 Feldkontinuum 106
 FITZGERALD, Hypothese von 23
 FIZEAU, Versuch von 29
 Flüssigkeit, inkohärente 126
 FRESNELScher Mitführungskoeffizient 29

 GALILEI-Transformation 11
 GAUSSScher Satz 110, 132, 138
 Geschwindigkeitsvektor, 4-dimensionaler 38

 Hyperebene 132

 Invarianz 30
 Impuls, 4-dimensionaler 42, 160
 Impulssatz 61
 Inertialkraft 9

Inertialmasse 43
 Inertialsystem 9

 Kernreaktionen 54, 66
 Kontinuitätsgleichung 80, 112
 Kontraktion eines Tensors 72
 Konvektionsstrom 104
 Konvention, LORENTZsche 85
 Koordinatensystem, absolutes 13
 Kraft, 4-dimensionale 55, 130

 Längenkontraktion 23
 LAPLACE-Operator 78
 Lichtkegel 33
 longitudinale Masse 50
 LORENTZ-Konvention 85
 LORENTZ-Transformation 16, 69

 Masse, longitudinale 50
 —, transversale 50
 Massenpunkt, Bewegung eines 128
 Materietensor 116
 MAXWELLSche Gleichungen 21, 79
 MAXWELLScher Spannungstensor 98, 123
 MAXWELLSche Theorie 106
 Meson, Lebensdauer des 25
 Metrik des Raumes 30
 MINKOWSKIScher Raum 29
 Mitführungskoeffizient, FRESNELScher 29
 Momententensor, 4-dimensionaler 150

 NEWTONSches Bewegungsgesetz 9
 Nulllinie 33
 Nullverschiebung 32

 Operator, D'ALEMBERTScher 78, 85
 —, LAPLACEScher 78

 Paarbildung 66
 Phase 12
 Photonen 28, 64
 Polteilchen 166
 Potential, elektromagnetisches 83
 —, retardiertes 90
 —, avanciertes 93
 POYNTINGScher Vektor 100
 Pseudovektor 77
 Punktteilchen 162

- Raum, 4-dimensionaler 29
- , MINKOWSKISCHER 31
- , pseudoeuklidischer 31
- Relativitätsprinzip 16
- Relativitätstheorem der NEWTONschen
Mechanik 11
- retardierte Potentiale 90
- Ruhenergie 52
- Ruhlänge 23
- Ruhmasse 44
- Ruhmassendichte 126
- Ruhsystem 25
- Ruhvolumen 23

- Satz, GAUSSscher 110, 132, 138
- Schwerpunktslinie 155
- Schwerpunktsatz 139
- Spannungstensor 98, 107
- , 4-dimensionaler 97, 101
- Spintensor 163
- Stoß, elastischer 54, 60
- , unelastischer 46, 51, 65
- Streuung, COMPTON- 64
- Strom-Ladungsdichtevektor, 4-dimen-
sionaler 81, 144
- symmetrischer Tensor 73
- System, statisches 124

- Teilchen, nichtrelativistisches 67
- Tensor 69

- Tensoralgebra 71
- Tensor, antisymmetrischer 73
- , symmetrischer 73
- Tensorfeld 75
- Theorie, MAXWELLSche 106
- Thermodynamik, relativistische 59
- Trägheit der Energie 52
- Trägheitskraft 9
- Transformation, GALILEI- 11
- , LORENTZ- 16, 69
- Transformationseigenschaften 86, 142
- Translationsgeschwindigkeit 21
- transversale Masse 50

- Überlichtgeschwindigkeit 27
- unelastischer Stoß 46, 51, 65

- Vektorfeld 75
- Vektorpotential 83
- Vektor, POYNTINGscher 100
- Verjüngung 72
- Verschiebung, raumartige 31
- , zeitartige 31
- Volumkontraktion 24

- Wellenlänge, COMPTON- 65
- Weltlinie 32

- Zeitdilatation 25
- Zerstrahlung 54, 65

